

グラフ

情報数学入門
2025 年度後期
デジタル社会共創学環 只木進一

- ① グラフの定義: Definition of graphs
- ② 様々なグラフ: Various types of graphs
- ③ Euler 閉路と Hamilton 閉路

グラフ: Graphs

- 日常用語ではネットワーク (networks) ともいう
 - インターネット
 - ヒトの繋がり
 - 交通網
 - 作業手順
- 要素の繋がり方に注目
- 関係 (relations) を可視化

実世界にある様々なグラフ・ネットワーク: Various graphs in the real world

- SINET
<https://www.sinet.ad.jp/aboutsinet>
- The Internet
<https://www.opte.org/the-internet>
- ANA 路線図
https://www.ana.co.jp/group/investors/irdata/annual/pdf/16f/16_F_08.pdf

グラフの定義: Definition of graphs

- グラフ: $G = (V, E)$
- V : 頂点 (vertex) の集合
- E : 辺 (edge) の集合
 - $e = (u, v)$: 頂点 u と v を結ぶ辺
 - 頂点 u と v を辺 e の端点という

有向グラフと無向グラフ: Directed and non-directed graphs

- 無向グラフ: non-directed graphs
 - 辺に向きの無いグラフ
 - $\partial : E \rightarrow V \times V$: 辺から端点への写像
- 有向グラフ: directed graphs
 - 辺に向きの有るグラフ
 - $\partial^+ : E \rightarrow V$: 始点
 - $\partial^- : E \rightarrow V$: 終点

例 1.1:

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$

$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$\partial^+ e_0 = v_0$$

$$\partial^- e_0 = v_1$$

$$\partial^+ e_1 = v_1$$

$$\partial^- e_1 = v_0$$

$$\partial^+ e_2 = v_1$$

$$\partial^- e_2 = v_3$$

$$\partial^+ e_3 = v_2$$

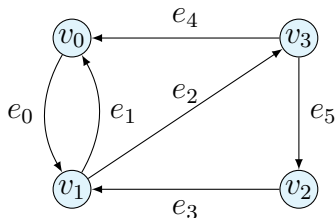
$$\partial^- e_3 = v_1$$

$$\partial^+ e_4 = v_3$$

$$\partial^- e_4 = v_0$$

$$\partial^+ e_5 = v_3$$

$$\partial^- e_5 = v_2$$



例 1.2:

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$

$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

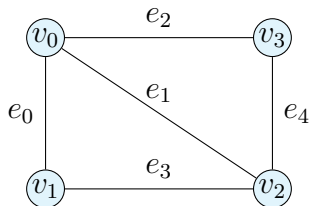
$$\partial e_0 = \{v_0, v_1\}$$

$$\partial e_1 = \{v_0, v_2\}$$

$$\partial e_2 = \{v_0, v_3\}$$

$$\partial e_3 = \{v_1, v_2\}$$

$$\partial e_4 = \{v_2, v_3\}$$



グラフの定義 2: Definition of graphs 2

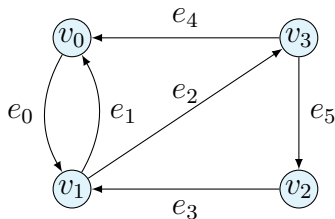
- 頂点に連結した辺を明示する
- 無向グラフに対して
 - $\delta : V \rightarrow 2^E$: 頂点から辺の集合
- 有向グラフに対して
 - $\delta^+ : V \rightarrow 2^E$: 頂点を始点とする辺の集合
 - $\delta^- : V \rightarrow 2^E$: 頂点を終点とする辺の集合

例 1.3: (例 1.1 に対応)

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$

$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$\begin{array}{llll} \delta^+ v_0 = \{e_0\} & \delta^- v_0 = \{e_1, e_4\} & \delta^+ v_1 = \{e_1, e_2\} & \delta^- v_1 = \{e_0, e_3\} \\ \delta^+ v_2 = \{e_3\} & \delta^- v_2 = \{e_5\} & \delta^+ v_3 = \{e_4, e_5\} & \delta^- v_3 = \{e_2\} \end{array}$$



例 1.4: (例 1.2 に対応)

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$

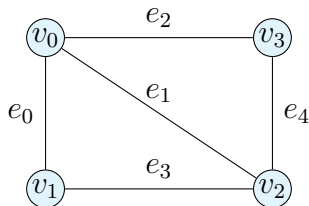
$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$\delta v_0 = \{e_0, e_1, e_2\}$$

$$\delta v_1 = \{e_0, e_3\}$$

$$\delta v_2 = \{e_1, e_3, e_4\}$$

$$\delta v_3 = \{e_2, e_4\}$$

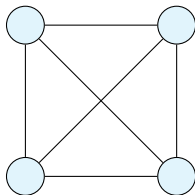
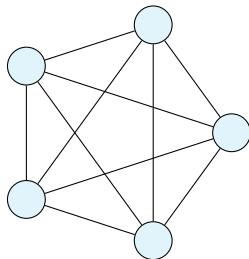


次数: Degree of vertex

- 無向グラフに対して
 - 頂点 v を始点とする辺: $\delta : V \rightarrow 2^E$
 - 頂点 v の次数: $|\delta v|$
- 有向グラフに対して
 - $\delta^+ : V \rightarrow 2^E$: 頂点を始点とする辺の集合
 - $\delta^- : V \rightarrow 2^E$: 頂点を終点とする辺の集合
 - 頂点 v の正次数: $|\delta^+ v|$
 - 頂点 v の負次数: $|\delta^- v|$

完全グラフ: Complete graphs

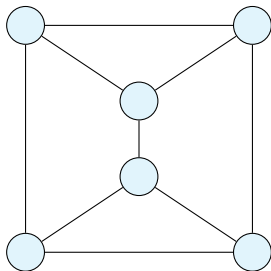
すべての頂点の組を結ぶ辺が存在する無向グラフ

 K_4  K_5

komplete: ドイツ語

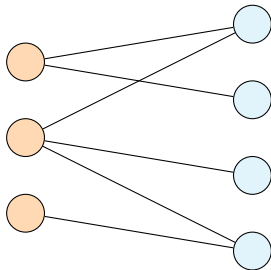
正則グラフ: Regular graphs

すべての頂点の次数が等しい無向グラフ

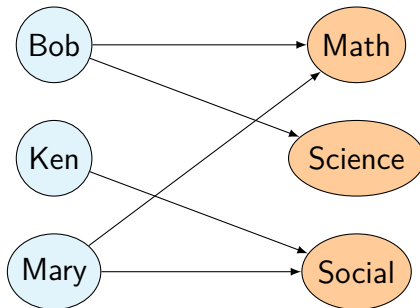


二部グラフ: Bipartites

- 頂点が2つの集合に別れ、集合内の辺が無い

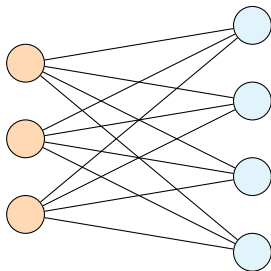


例 2.1: 得意科目



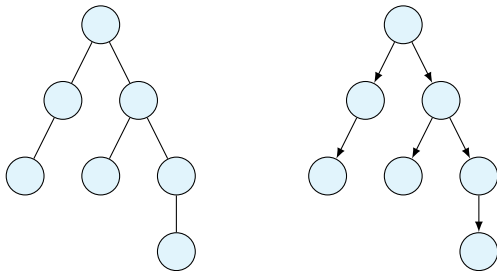
完全二部グラフ: Complete bipartites

左の各点が右の各点と結ばれている



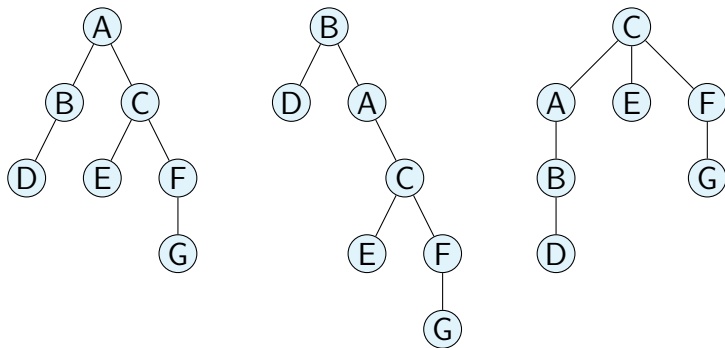
木: Trees

閉路の無いグラフ。有向と無向がある。



無向木では、任意の頂点が根 (root) になることができる。

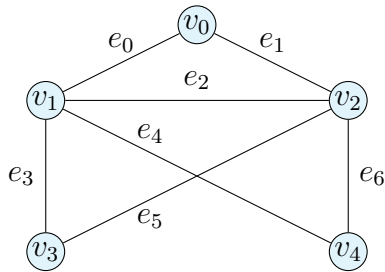
例 2.2: 同一の木



Euler 閉路: 一筆書き: Euler circuits

- 「Königsberg の橋」: Graph 理論の端緒
 - Leonhard Euler (1707-1783)
 - <https://www.scientificamerican.com/article/how-the-seven-bridges-of-koenigsberg-spawned-new-math/>
- 無向グラフに対して、全ての辺を一度ずつ通り、元の頂点に戻る道を見つける
 - 道 (path): 辺の列
- 全ての頂点の次数が偶数の場合のみ、Euler 閉路が存在する

例 3.1:



Euler 閉路の例

$$e_0 \rightarrow e_3 \rightarrow e_5 \rightarrow e_6 \rightarrow e_4 \rightarrow e_2 \rightarrow e_1$$

Euler 閉路を列挙するアイデア

- 列挙 (enumerate): 全て示す
- 始点から、再帰的に辺をたどる
- 全ての辺を一度ずつ通り、始点に戻る経路を保存する
 - 経路を構成する辺の数とグラフの辺の数の比較
 - 始点に戻ったか
- 経路を構成する辺を管理

Algorithm 1 Euler 閉路列挙のアルゴリズム

```

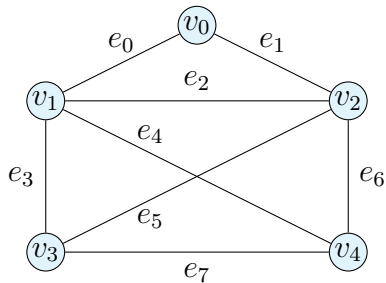
//                                     ▷  $E_{\text{Euler}}$ : 経由した辺のリスト、初期値  $E_{\text{Euler}} = \emptyset$ 
//                                     ▷  $r$ : 始点
procedure ENUMERATEEULER( $v, E_{\text{Euler}}$ )
  if ( $v == r$ )  $\wedge$  ( $|E_{\text{Euler}}| == |E|$ ) then
    見つけた Euler 閉路  $E_{\text{Euler}}$  を保存
  else
    for all  $e \in \delta v$  do                                     ▷  $//v$  に接続する全ての辺
      if  $e \notin E_{\text{Euler}}$  then
         $E'_{\text{Euler}} = E_{\text{Euler}} \cup \{e\}$ 
         $w = \partial e \setminus \{v\}$                                      ▷  $//$  辺  $e$  の  $v$  と反対側の頂点
        enumerateEuler( $w, E'_{\text{Euler}}$ )
      end if
    end for
  end if
end procedure

```

Hamilton 閉路: Hamilton circuits

- 無向グラフに対して、全ての頂点を一度ずつ経由して、始点に戻る閉路
- 巡回セールスマン問題等で必要となる

例 3.2:



閉路の例

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_2 \rightarrow v_0$$