

# 述語と論理、帰納法

情報数学入門  
2025 年度後期  
デジタル社会共創学環 只木進一

- ① 論理と集合
- ② 数学的帰納法
- ③ 累積帰納法
- ④ 再帰的定義
- ⑤ 再帰的アルゴリズム

# 命題と述語: Propositions and Predicates

- 命題 (Propositions): 真または偽のいずれかの値を持つ文
- 述語 (Predicates): 変数を含む文で、変数に具体的な値を代入すると命題になる、つまり真または偽の値を持つ文
- 例
  - 命題: “2 は偶数である”
  - 述語: “ $x$  は偶数である”

# 述語と集合

- 述語  $p(x)$  が与えられたとき、 $p(x)$  が真となる  $x$  の集合  $P$  を考えることができる
- 例: 述語  $p(x)$ :  $x$  は偶数である自然数である

$$P = \{x \mid p(x)\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

# 和集合、共通部分、補集合、 論理和、論理積、否定

- 全体集合を  $U$  とする
- 述語  $p(x)$  と  $q(x)$  に対して、対応する集合をそれぞれ  $P$ 、 $Q$  とする

$$P \cup Q = \{x \mid p(x) \vee q(x)\} \quad (1.1)$$

$$P \cap Q = \{x \mid p(x) \wedge q(x)\} \quad (1.2)$$

$$P^c = \{x \mid \neg p(x)\} = U - P \quad (1.3)$$

## 例 1.1:

- $U = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 10\}$
- 述語  $p(n)$ :  $n$  は、 $U$  の中で偶数である
- 述語  $q(n)$ :  $n$  は、 $U$  の中で 3 の倍数である

$$P = \{n \mid p(n)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$Q = \{n \mid q(n)\} = \{3, 6, 9\}$$

$$P \cup Q = \{n \mid p(n) \vee q(n)\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

$$P \cap Q = \{n \mid p(n) \wedge q(n)\} = \{6\}$$

$$P^c = \{n \mid \neg p(n)\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

# 別の表現

$$U = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 10\}$$

$$P = \{n \mid n \text{は偶数である}, n \in U\}$$

$$Q = \{n \mid n \text{は} 3 \text{の倍数である}, n \in U\}$$

# 数学的帰納法: Mathematical Induction

- 命題  $p(n)$ : 自然数  $n$  に関するもの
- このような命題の証明方法
  - 基底部:  $p(1)$  が成り立つことを示す
  - 帰納部: 任意の自然数  $k$  について、 $p(k)$  を仮定し、 $p(k+1)$  が成り立つことを示す
  - 基底部が 1 から始まらない場合もある

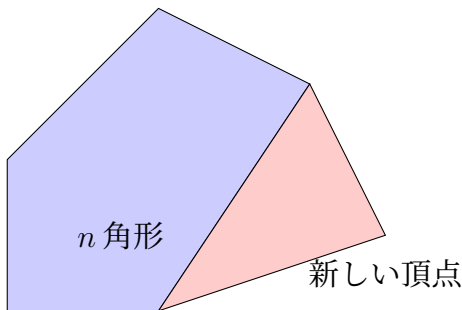
例 2.1:  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 

- $n = 1$ :
  - LHS (Left Hand Side):  $\sum_{k=1}^1 k = 1$
  - RHS (Right Hand Side):  $\frac{1(1+1)}{2} = 1$
- ある  $n$  で正しいと仮定

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

例 2.2:  $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

## 例 2.3: $n$ 角形の内角の和は $(n - 2)\pi$



- $n = 3$ :
  - 三角形の内角の和は  $\pi$
- ある  $n$  で正しいと仮定
  - $n + 1$  角形を考える
  - $n$  角形の内角の和は  $(n - 2)\pi$
  - 新たに頂点を追加することは、三角形を一つ追加することに等しい
  - よって、内角の和は  $(n - 2)\pi + \pi = (n - 1)\pi$

# 累積帰納法: Couse-of-values Induction

- 命題  $p(n)$ : 自然数  $n$  に関するもの
- このような命題の証明方法
  - 基底部:  $p(1)$  が成り立つことを示す
  - 帰納部:  $p(k)$  が  $1 \leq k \leq n$  に対して成り立つと仮定し、 $p(n+1)$  が成り立つことを示す

## 例 3.1:

漸化式

$$a_0 = 1$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n 2^k a_{n-k}, \quad n \geq 1$$

を満たす数列  $a_n$  の一般項は

$$a_n = 2^{2n-1}$$

である

証明:  $n = 1$ 

- 漸化式より

$$a_1 = \sum_{k=1}^1 2^k a_{1-k} = 2^1 a_0 = 2$$

- 一般項の式より

$$a_1 = 2^{2 \cdot 1 - 1} = 2$$

証明:  $n$  以下で正しいと仮定

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^k a_{n+1-k} \\&= \sum_{k=1}^n 2^k a_{n+1-k} + 2^{n+1} a_0 \\&= \sum_{k=1}^n 2^k 2^{2(n+1-k)-1} + 2^{n+1} \\&= 2^{2n+1} \sum_{k=1}^n 2^{-k} + 2^{n+1} \\&= 2^{2n+1} (1 - 2^{-n}) + 2^{n+1} \\&= 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 2^{n+1} \\&= 2^{2(n+1)-1}\end{aligned}$$

## 例 3.2: Fibonacci 数列

- 漸化式での定義

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2$$

- 一般項

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$n = 0, 1$$

- $n = 0$ :

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 = 0$$

- $n = 1$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}) = 1 \end{aligned}$$

$f_n$  と  $f_{n-1}$  から  $f_{n+1}$  を導出

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left( 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \left( 1 + \frac{2}{1-\sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{3 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

# 再帰的定義: Recursive Definitions

- 可算集合、可算集合上の関数・関係を初期値と再帰手続きで定義
- 可算集合  $S$ 
  - 初期値:  $S$  の元をいくつか列挙
  - 再帰手続き:  $S$  の元から新たな元を生成する手続き
  - 限定句: 以上の二つにより生成される元以外は  $S$  に含まれない。通常は明示されない

## 例 4.1: 自然数の再帰的定義: Peano の公理

- 初期値: 1 は自然数である
- 再帰手続き: 単射  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  が存在する
  - $1 \notin S(\mathbb{N})$
  - $S$  は後者 (successor) を与える関数、つまり  $n$  に対して  $n + 1$  を与える

## 例 4.2: 階乗

$$0! = 1$$

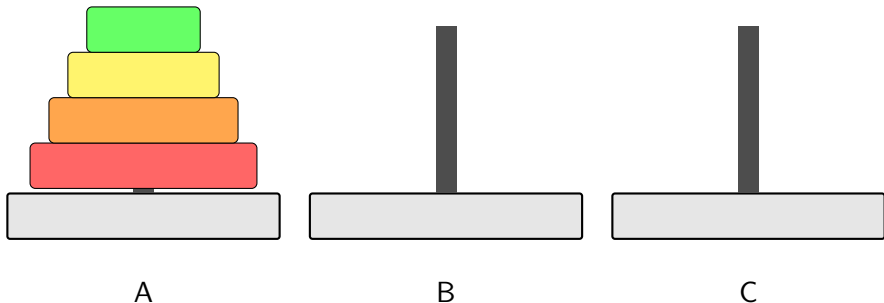
$$n! = n \times (n - 1)!, \quad n \geq 1$$

# 再帰的アルゴリズム: Recursive Algorithms

- 問題を小さな部分問題に分割し、部分問題を解くことで元の問題を解くアルゴリズム
- 基底部: 問題が十分に小さくなったときに直接解く部分
- 再帰部: 問題を部分問題に分割し、部分問題を解き、解を組み合わせることで元の問題を解く部分

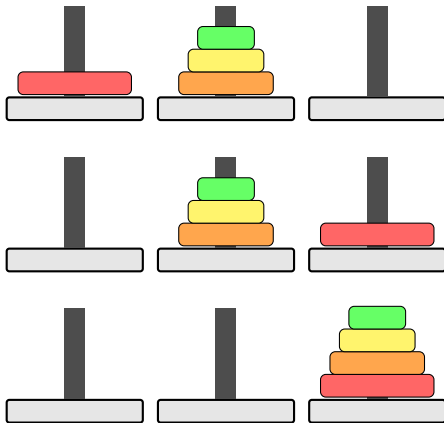
## 例 5.1: ハノイの塔

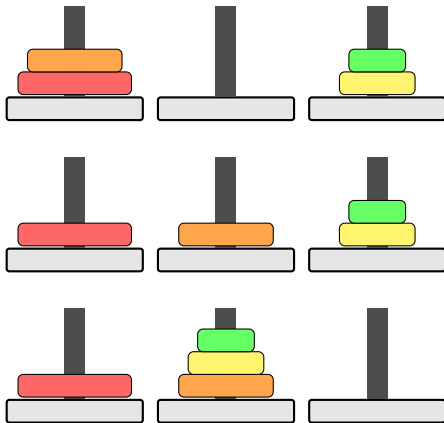
- 3本の棒と異なる大きさの  $n$  枚の円盤がある
- $A$  にある円盤を全て  $C$  へ移動
- 一度に移動できる円盤は1枚だけ
- 大きい円盤を小さい円盤の上に置くことはできない



# 再帰のイメージ

- 4枚を A から C へ
  - 上の 3 枚の円盤を A から B へ移動
  - 一番下の円盤を A から C へ移動
  - B にある 3 枚の円盤を C へ移動
- 上の 3 枚の円盤を A から B へ移動
  - 上の 2 枚の円盤を A から C へ移動
  - 一番下の円盤を A から B へ移動
  - C にある 2 枚の円盤を B へ移動
- 1 枚の円盤は直接移動可能





# 再帰的アルゴリズムの擬似コード

$n$  枚の円盤を  $A$  から  $C$  へ移動、 $B$  は補助の棒

```
1: function HANOI( $n, A, B, C$ )  
2:   if  $n = 1$  then  
3:     Move one disk from  $A$  to  $C$   
4:   else  
5:     HANOI( $n - 1, A, C, B$ )  
6:     Move one disk from  $A$  to  $C$   
7:     HANOI( $n - 1, B, A, C$ )  
8:   end if  
9: end function
```