関係

情報数学入門
2025年度後期
デジタル社会共創学環 只木進一

1. 導入
2. 関係の定義
3. 関係、写像、グラフ
4. 同時関係と分類
5. 順序

関係の例: 等号 $=$

- $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、$a = b$ のとき、a は b と等しいと言い、a と b の間に等号の関係があると言う。
- 等号の性質:
  - 反射律: 任意の $a \in \mathbb{R}$ について、$a = a$
  - 対称律: 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ について、$a = b$ ならば $b = a$
  - 推移律: 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ について、$a = b$ かつ $b = c$ ならば $a = c$

関係の例: 大小関係 $<$

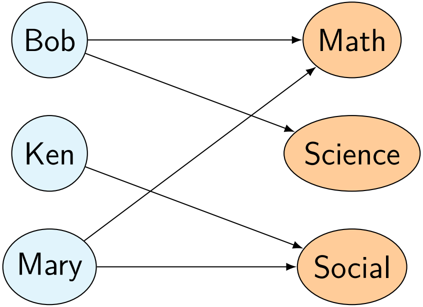
- $a, b \in \mathbb{R}$
- 大小関係の性質:
  - ~~反射律~~: 任意の $a \in \mathbb{R}$ について、$a < a$ は成り立たない
  - ~~対称律~~: 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ について、$a < b \Longrightarrow b < a$ は成り立たない
  - 推移律: 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ について、$a < b$ かつ $b < c$ ならば $a < c$

関係の例: 集合の包含関係 $\subseteq$

- A, B を集合とする。
- 包含関係の性質:
  - 反射律: 任意の集合 A について、$A \subseteq A$
  - ~~対称律~~: 任意の集合 A, B について、$A \subseteq B \Longrightarrow B \subseteq A$ は成り立たない
  - 推移律: 任意の集合 A, B, C について、$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば $A \subseteq C$

関係の例: 得意科目

- $A = \{\text{Bob}, \text{Ken}, \text{Mary}\}$: 生徒の集合
- $B = \{\text{Math}, \text{Science}, \text{Social}\}$: 科目の集合



順序対: ordered pair

- 集合 A と B を考える
- $a \in A$ と $b \in B$ に対して、(a, b) で表されるものを順序対と呼ぶ: 順序に意味があることに注意
- 直積 $A \times B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \tag{2.1}$$

二項関係: binary relation

- 集合 A と B の直積 $A \times B$ の部分集合 $R \subseteq A \times B$ を二項関係と呼ぶ。
- $a \in A$ と $b \in B$ に対して、$(a, b) \in R$ のとき、a は b と関係 R にあると言う。
- $A = B$ のとき、関係 R は集合 A 上の関係と言う。
- tuple ともいう。

例 2.1: 二項関係

- $A = \{1, 2, 3\}$
  - 関係 $=$: $R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
  - 関係 $<$: $R = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$
- $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
  - 関係 $|a| = |b|$:

$$R = \{(-2,-2), (-2,2), (-1,-1), (-1,1), (0,0), (1,-1), (1,1), (2,-2), (2,2)\}$$

- 写像との違いに注意

n 項関係: n-ary relation

- 集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して、直積

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)\} \tag{2.2}$$

- この直積の部分集合 $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ を n 項関係と呼ぶ。

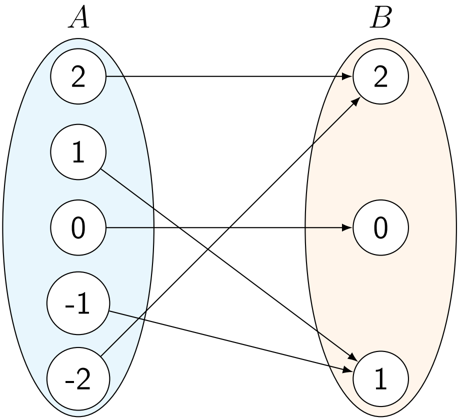
関係、写像、グラフ

- 関係と写像をグラフで表現できる
- グラフ: 頂点と辺からなる構造
- 頂点: 元を表す
- 辺: 元同士の関係を表す
- 有向グラフ: 辺に向きがあるグラフ

写像とグラフ

写像 $f: A \to B$ において、原像 $a \in A$ とその像 $b = f(a) \in B$ を表現する順序対 (a, b)

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$
$$B = \{0, 1, 2\}$$
$$f(x) = |x|$$

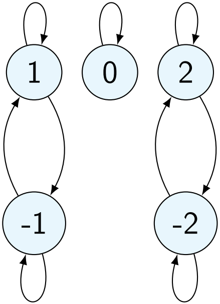


関係とグラフ

関係 $R \subseteq A \times A$ において、元 $a \in A$ と $b \in A$ が関係 R にあることを表現する順序対 (a, b)

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\begin{aligned} R &= \{(a, b) \mid a, b \in A, |a| = |b|\} \\ &= \{(-2, -2), (2, 2), (-1, -1), (1, 1), \\ &\quad (0, 0), \\ &\quad (-1, 1), (1, -1), (-2, 2), (2, -2)\} \end{aligned}$$



同値関係

集合 A 上の関係 R が以下の性質を満たすとき、R は同値関係であると言う。

- 反射律: 任意の $a \in A$ について、$(a, a) \in R$
- 対称律: 任意の $a, b \in A$ について、$(a, b) \in R$ ならば $(b, a) \in R$
- 推移律: 任意の $a, b, c \in A$ について、$(a, b) \in R$ かつ $(b, c) \in R$ ならば $(a, c) \in R$

例 4.1: 複素数の絶対値が等しい関係

- 集合 $A = \mathbb{C}$ 上の関係 R を次で定義する。

$$(a, b) \in R \Longleftrightarrow |a| = |b|$$

- この関係 R は同値関係である。
  - 反射律: $\forall a \in \mathbb{C}$ について、$|a| = |a|$
  - 対称律: $\forall a, b \in \mathbb{C}$ について、

$$(a, b) \in R \Longrightarrow |a| = |b| \wedge |b| = |a|$$

  - 推移律: $\forall a, b, c \in \mathbb{C}$ について、

$$\begin{aligned}(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R &\Longrightarrow |a| = |b| \wedge |b| = |c| \\ &\Longrightarrow |a| = |c|\end{aligned}$$

例 4.2: 法 m として合同

- 負で無い全体の集合 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 上の関係 R を次で定義する。

$$(a, b) \in R \Longleftrightarrow a \equiv b \pmod{m} \tag{4.1}$$

  これは、すなわち m が $a - b$ を割り切ることを意味する。
- この関係 R は同値関係である。
- 例: $m = 3$
  - $(0, 0), (0, 3), (0, 6), \ldots \in R$
  - $(1, 1), (1, 4), (1, 7), \ldots \in R$
  - $(2, 2), (2, 5), (2, 8), \ldots \in R$

同値類

- 集合 A 上に同値関係 R があるとする。
- 同値関係 R は、A の元をいくつかの重複の無いグループに分類する。
- これらのグループを同値類と呼ぶ。
- 例: 法 3 として合同の同値類

$$[0] = \{0, 3, 6, 9, \ldots\} = \{n \mid n \equiv 0 \pmod 3\}$$
$$[1] = \{1, 4, 7, 10, \ldots\} = \{n \mid n \equiv 1 \pmod 3\}$$
$$[2] = \{2, 5, 8, 11, \ldots\} = \{n \mid n \equiv 2 \pmod 3\}$$

順序: Order

- 反対称律
  - $\forall a, b \in A$ に対して、$(a, b) \in R$ かつ $(b, a) \in R$ ならば $a = b$
- 関係が反射律、推移律、反対称律を満たすとき、半順序 (partial-order) または順序という
  - 例: 集合 $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leq$
- 半順序が定義された集合を半順序集合という

全順序: Total order

- 全順序: 半順序に加えて、任意の二つの要素について比較可能であるとき
- 全順序が定義された集合を全順序集合という

例

- 自然数、整数、有理数、実数に対する大小関係 $\leq$ は全順序
  - 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、$a \leq b$ または $b \leq a$
- 集合の包含関係 $\subseteq$ は半順序
  - 例えば、全体集合 $\mathbb{N}$ の 2 つの部分集合 $A = \{1, 2\}$ と $B = \{3, 4\}$ に対して、$A \subseteq B$ でもなく、$B \subseteq A$ でもない