

集合と演算: その2

情報数学入門
2025 年度後期
デジタル社会共創学環 只木進一

① 前回の復習

② 写像の合成

③ 置換

写像の定義

- X と Y を空でない集合とする
- $x \in X$ を一つ定めると $y \in Y$ が必ず定まるとき、 f を X から Y への**写像**といい、

$$f : X \rightarrow Y$$

と書く。

- 集合と集合の対応関係に注目しているときには、写像という概念を用いる。

写像の種類

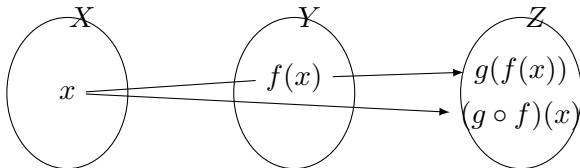
- $f : X \rightarrow Y$ を考える
- 単射: $x_1 \neq x_2 \in X$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$
- 全射: 任意の $y \in Y$ に対して、ある $x \in X$ が存在して $f(x) = y$
- 全単射: 単射かつ全射
 - 逆写像 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ が存在する

写像の合成

- $f: X \rightarrow Y$ 、 $g: Y \rightarrow Z$ を考える
- このとき、 $g \circ f: X \rightarrow Z$ を以下で定義

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

- f と g の順番に注意
- $g \circ f$ を f と g の合成写像 (composition) という



例 2.1: 合成写像

$$X = \{a, b, c\}$$

$$Y = \{1, 2, 3\}$$

$$Z = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$f(a) = 2, \quad f(b) = 3, \quad f(c) = 1,$$

$$g(1) = \beta, \quad g(2) = \gamma, \quad g(3) = \alpha$$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(2) = \gamma,$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(3) = \alpha,$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(1) = \beta$$

例 2.2: 合成写像

$$\begin{aligned}X &= Y = Z = \mathbb{R}, \\f(x) &= 2x + 1, \\g(x) &= x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1, \\(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1\end{aligned}$$

合成写像の結合律

- $f : X \rightarrow Y$ 、 $g : Y \rightarrow Z$ 、 $h : Z \rightarrow W$ を考える

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (2.1)$$

例 2.3: 結合律の確認

$$X = Y = Z = \mathbb{R},$$

$$W = \mathbb{Z},$$

$$f(x) = 2x + 1,$$

$$g(x) = x^3,$$

$$h(x) = \lceil x \rceil$$

$$(g \circ f)(x) = (2x + 1)^3,$$

$$(h \circ g)(x) = \lceil x^3 \rceil$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h((2x + 1)^3) = \lceil (2x + 1)^3 \rceil,$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(2x + 1) = \lceil (2x + 1)^3 \rceil$$

全単射と逆写像

- $f : X \rightarrow Y$ が全単射とする
- $f^{-1} : Y \rightarrow X$ が存在

$$f^{-1} \circ f = I_X, \quad (2.2)$$

$$f \circ f^{-1} = I_Y \quad (2.3)$$

- $X = Y$ のとき

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_X \quad (2.4)$$

置換: permutation

- $N_n = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$
- N_n の順番を入れ替える写像 $\sigma : N_n \rightarrow N_n$ を置換という
- 例: N_5

$$\sigma(1) = 3,$$

$$\sigma(2) = 5,$$

$$\sigma(3) = 4,$$

$$\sigma(4) = 1,$$

$$\sigma(5) = 2$$

置換の表現

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

例 3.1: $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $3! = 3 \times 2 = 6$ 通り
- 一般に置換は $n!$ 通り