

集合と写像

情報数学入門
2025 年度後期
デジタル社会共創学環 只木進一

① 関数の復習

② 写像

③ 写像の種類

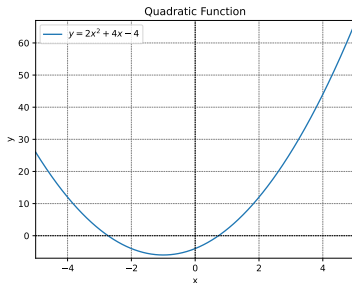
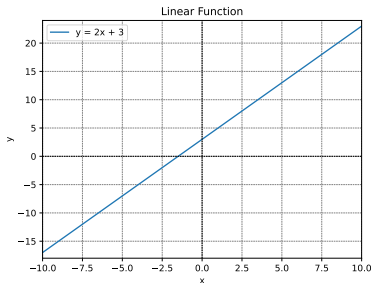
関数の復習

- ある範囲内にある実数 x に対して、ある計算を行い、その結果 y を得る

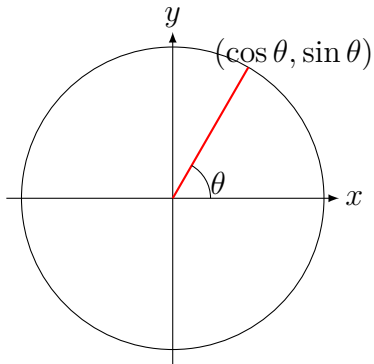
$$y = f(x) \quad (1.1)$$

- f を関数と呼ぶ
- x : f の引数・入力・独立変数
- y : f の値・出力・従属変数

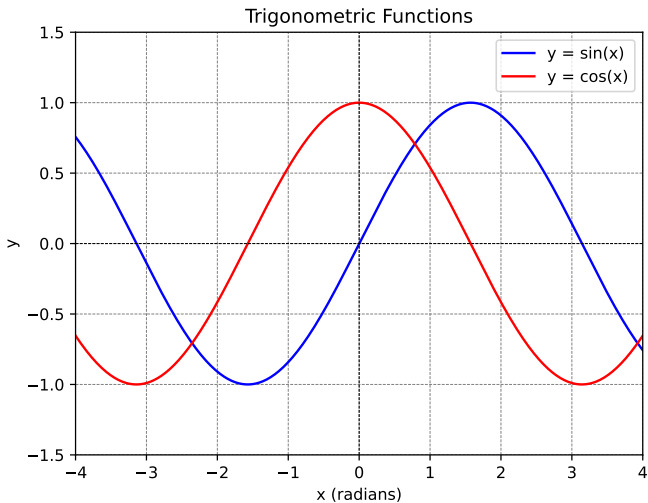
1 次関数と 2 次関数



三角関数



三角関数



関数の拡張

- 関数 f は、一つの x に対して、一つの y を対応させる規則一般
- x や y が実数である必要はない
- 例
 - 文字に対して、そのコードを対応させる関数
 - 正の 10 進整数に対して、その 2 進表記を対応させる関数
 - 実数のリストに対して、最大値を対応させる関数

関数から写像へ

- 定義域 X : f の引数 x が取りうる値の範囲:
- 値域 Y : f の値 y が取りうる値の範囲
- 関数 f は、一つの $x \in X$ に対して、一つの $y \in Y$ を対応させる規則
- X から Y への一方向の対応付けを**写像**と呼ぶ
 - 集合と集合の対応関係に注目した概念
 - x に対して y が複数対応する場合は考えない

写像の定義

X と Y を空でない集合とする。 $x \in X$ を一つ定めると $y \in Y$ が必ず定まるとき、 f を X から Y への**写像**といい、以下のように表す

$$f : X \rightarrow Y \quad (2.1)$$

- 関数は写像の一種である

写像の例

- 関数 $f(x) = \lceil x \rceil$ は、写像 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$
- X として {リンゴ, ミカン, バナナ}、 Y としてその値段とし、
果物から値段への対応付け

写像の等号

- $f: X \rightarrow Y$ 、 $g: X \rightarrow Y$ を写像とする
- すべての $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ (値が等しい) ならば以下のように等号を用いて表す

$$f = g \tag{2.2}$$

定値写像、恒等写像

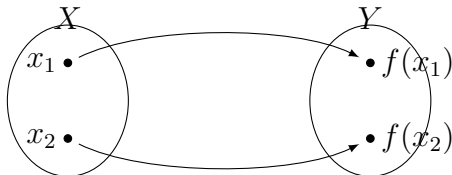
- X : 空でない集合
- $\forall x \in X, f(x) = a$ を **定値写像** (constant map) と呼ぶ
- $\forall x \in X, f(x) = x$ を **恒等写像** (identity map) と呼ぶ
 - 恒等写像を I と書くことがある
 - $I : X \rightarrow X$ と書く

単射: injection

- $f : X \rightarrow Y$
- $\forall x_1 \neq x_2 \in X$ に対して、

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

ならば、 f は単射であるという



例 3.1: 単射

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ である以下の写像は単射である

$$f(x) = x^3$$

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ である以下の写像は単射でない

$$f(x) = x^2$$

なぜなら、例えば $f(2) = f(-2) = 4$ であるから

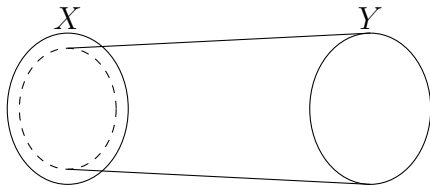
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ である $f(x) = \lfloor x \rfloor$ は単射でない

全射: surjection

- $f : X \rightarrow Y$
- $\forall y \in Y$ に対して、ある $x \in X$ が存在して、

$$f(x) = y$$

ならば、 f は全射であるという



例 3.2: 全射

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ である以下の写像は全射である

$$f(x) = x^3 + 5$$

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ である以下の写像は全射でない

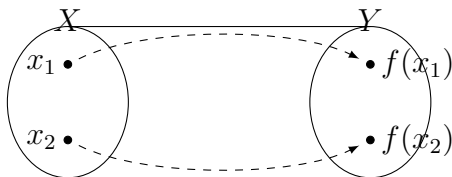
$$f(x) = x^2$$

なぜなら、例えば $f(x) \geq 0$ であるから

- 値域の定義によることに注意

全単射: bijection

- $f : X \rightarrow Y$
- f が単射かつ全射であるとき、 f は全単射であるという



例 3.3: 全単射

アルファベットとその ASCII コードを

$$A = \{A, B, \dots, Z, a, \dots, z\}$$

$$C = \{0x41, 0x42, \dots, 0x5A, 0x61, \dots, 0x7A\}$$

とし、写像 $f: A \rightarrow C$ を考える

- f は単射である: 異なる文字は異なるコードに対応する
- f は全射である: C に含まれるすべてのコードに対応する文字が A に含まれる

よって、 f は全単射である

逆写像: inverse map

- $f : X \rightarrow Y$ が全単射であるとする
- $\forall y \in Y$ に対して、ただ一つの $x \in X$ が存在して、

$$f(x) = y$$

- このとき、 $g : Y \rightarrow X$ を

$$g(y) = x$$

で定めると、 g は写像となる

- g を f の逆写像と呼び、 f^{-1} と書く

例 3.4: 逆写像

例 3.3 で定義した写像 $f: A \rightarrow C$ の逆写像 $f^{-1}: C \rightarrow A$ は、ASCII コードから対応する文字への対応付けを与える

- $f^{-1}: C \rightarrow A$ は単射である: 異なるコードは異なる文字に対応する
- $f^{-1}: C \rightarrow A$ は全射である: A に含まれるすべての文字に対応するコードが C に含まれる