

集合

情報数学入門
2025 年度後期
デジタル社会共創学環 只木進一

① 集合の定義

② 集合の包含関係

集合とは

- 集合 (Set) とは、ある条件を満たすものの集まり
 - 条件を満たすものを要素や元 (element) と呼ぶ
 - 条件は明確でなければならない
- 例: 自然数の集合、偶数の集合、素数の集合など
- 集合は大文字で表すことが多い (例: A, B, C)
- 要素は小文字で表すことが多い (例: a, b, c)

$$a \in A \quad (a \text{ は } A \text{ の要素}) \quad (1.1)$$

$$b \notin A \quad (b \text{ は } A \text{ の要素ではない}) \quad (1.2)$$

例 1.1: 簡単な集合

- $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ とする

$$2 \in A$$

$$4 \notin A$$

$$5 \in A$$

$$6 \notin A$$

- $B = \{\text{apple}, \text{banana}, \text{melon}\}$ とする

$$\text{banana} \in B$$

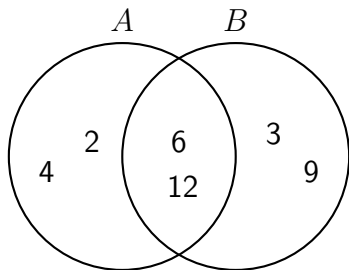
$$\text{grape} \notin B$$

$$\text{melon} \in B$$

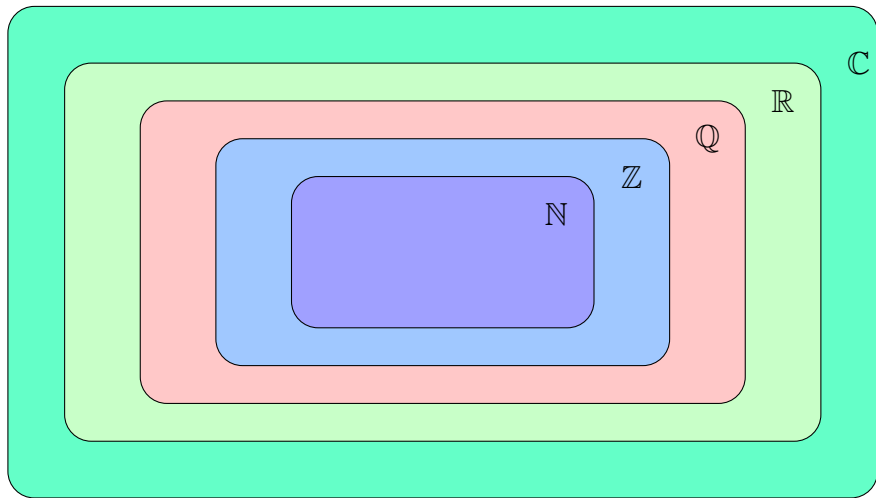
$$\text{orange} \notin B$$

Venn 図

- 集合を視覚的に表現する方法の一つ
- 円や楕円で集合を表し、その中に要素を配置
- 例えば、 A が正の偶数全体の集合、 B が 3 の倍数全体の集合



例 1.2: 数の集合



有限集合、無限集合、空集合

- 集合 A の要素の個数を $|A|$ で表す。
 - 基数 (Cardinal number, cardinality) とも呼ぶ。
- 有限集合 (limited set): 要素の数が有限
- 無限集合 (infinite set): 要素の数が無限
- 空集合 (empty set): 要素が一つもない集合。 $\emptyset$ で表す。

例 1.3: 集合と基数

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は無限集合
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ は有限集合で $|A| = 5$
- $B = \{x \mid x \text{ は } 20 \text{ 以下の素数}\}$ は有限集合で $|B| = 8$
 - B の要素を確かめよう
- $P = \{x \mid x \text{ は素数}\}$ は無限集合

外延的記法と内包的記法

- 外延的記法 (extensional notation): 要素を列挙して集合を表す方法

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12\}$$

- 内包的記法 (intensional notation): 集合の要素が満たす条件を示して集合を表す方法

$$A = \{x \mid x \text{は} 1 \text{ から } 5 \text{ までの自然数}\}$$

$$= \{x \mid 1 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{は} 3 \text{ の倍数で } 12 \text{ 以下の自然数}\}$$

$$= \{x \mid x = 3n, x \leq 12, n \in \mathbb{N}\}$$

内包的記法ならば無限集合を正確に表せる

- 外延的記法では無限集合を正確に表せない

$$A = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$B = \{2, 4, 6, \dots\}$$

- 内包的記法ならば無限集合を正確に表せる

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$$

例 1.4: 内包的記法と外延的記法

$A = \{x \mid x \text{ は } 20 \text{ 以下の素数}\}$ を外延的記法で表せ。

$B = \{x \mid x \text{ は } 3 \text{ の倍数で } 12 \text{ 以下の自然数}\}$ を外延的記法で表せ。

可算集合

- 可算集合: countable (enumerable) set: 自然数と一対一対応が取れる集合
 - 有限集合は全て可算集合
 - 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は可算集合
 - 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合
- 非可算集合: uncountable (non-enumerable) set: 自然数と一対一対応が取れない集合
 - 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は非可算集合

部分集合: subsets

- 集合 B が集合 A の部分集合
 - B の全ての要素が A の要素

$$B \subseteq A \quad (2.1)$$

- $\forall x \in B \implies x \in A$
 - $x \in B$ ならば $x \in A$
 - $\forall x \in B$: B の全ての要素 (任意ともいう) x について
- $A = B$: A の全ての要素が B の要素であり、かつ B の全ての要素が A の要素

真部分集合: proper subsets

- 集合 B が集合 A の真部分集合
 - B が A の部分集合であり、かつ $B \neq A$

$$B \subset A \quad (2.2)$$

- $\exists x \in A \Rightarrow x \notin B$
- $\exists x \in A$: A の要素の中に少なくとも一つ x が存在して

例 2.1: 簡単な部分集合

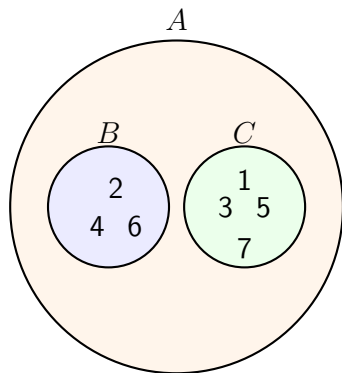
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$C = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$B \subset A$$

$$C \subset A$$



例 2.2: 整数は有理数の部分集合

- 有理数全体の集合: $\mathbb{Q}$
- 整数全体の集合: $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

