

命題と論理: その2

情報数学入門
2025 年度後期
デジタル社会共創学環 只木進一

- ① 含意、同値、十分条件、必要条件、必要十分条件
- ② 逆、裏、対偶
- ③ 証明と命題論理
- ④ Boolean 代数

含意: implication

- p と q を命題変数とする
- 命題「 p ならば q 」 (if p then q , p implies a) を含意と呼ぶ

$$p \implies q \quad (1.1)$$

- 真理値表

p	q	$p \implies q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- p が偽ならば、 q の真偽に関わらず、 $p \implies q$ は真となる
⇒ 偽からは何でも導ける

例 1.1: 含意

「 x が奇数ならば、 x^2 は奇数である」

- p : 「 x は奇数である」
- q : 「 x^2 は奇数である」
- 命題: $p \implies q$
- p : 十分条件:
- q : 必要条件
- この場合、 $q \implies p$ も成り立つ

例 1.2: 含意

「実数 x が $|x| > 2$ であるならば、 $x^2 > 4$ である」

- $|x| > 2$ であることは、 $x^2 > 4$ であるために十分である
 - つまり、 $|x| > 2$ であるだけで、 $x^2 > 4$ が保証される
- $x^2 > 4$ であることは、 $|x| > 2$ であるために必要である
 - つまり、 $x^2 > 4$ でなければ、 $|x| > 2$ は成り立たない
 - $0 < x^2 \leq 4$ のとき、 $|x| > 2$ は成り立たない

同値

- $p \Longleftrightarrow q$:
 - $p \Longrightarrow q$ かつ $q \Longrightarrow p$
 - q が真のとき、そのときに限り p が真
- p は q の必要十分条件
- q は p の必要十分条件
- p と q は同値:

$$p \equiv q$$

例 1.3: ピタゴラスの定理

- p : 三角形が直角三角形である
- q : 直角を挟む2辺の長さを a, b 、斜辺の長さを c とすると、 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つ
- 命題: $p \implies q$
- 命題: $q \implies p$
三角形の三辺の長さが a, b, c で、 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすならば、その三角形は直角三角形である
- p と q は同値: $p \iff q$

逆、裏、対偶

- 命題 $p \implies q$ に対して
 - 逆 (converse): $q \implies p$
 - 裏 (inverse): $\neg p \implies \neg q$
 - 対偶 (contrapositive): $\neg q \implies \neg p$

例 2.1: 逆、裏、対偶

命題: n と m を自然数とする。 n と m が 3 の倍数ならば、 $n \times m$ は 9 の倍数である。

- 逆: $n \times m$ が 9 の倍数ならば、 n と m はともに 3 の倍数である
- 裏: n または m の少なくとも一方が 3 の倍数でないならば、 $n \times m$ は 9 の倍数でない
- 対偶: $n \times m$ が 9 の倍数でないならば、 n または m の少なくとも一方は 3 の倍数でない

それぞれの、真偽を確かめよう。

真理値表

p	q	$p \implies q$	$q \implies p$	$\neg p \implies \neg q$	$\neg q \implies \neg p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

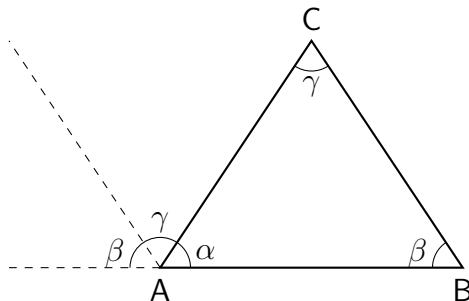
- $p \implies q$ と その対偶 $\neg q \implies \neg p$ は同値
- $q \implies p$ と $\neg p \implies \neg q$ も同値
- $p \implies q$ を証明するために、対偶の証明を使うことができる

含意を含む命題

- 命題 $p \implies q$ は、 p が真ならば q も真であることを意味する
- p を仮定し、その他の証明された定理を使って q を導く

例 3.1: 三角形の内角の和は180度

- p : 三角形
- q : 内角の和は180度
- 平行線を使って等しい角度を示す



例 3.2: 対偶法

$$m \text{ 及び } n \text{ が奇数} \implies p = mn \text{ は奇数}$$

- 対偶: $p = mn$ が偶数 $\implies m$ と n の少なくとも一方は偶数
- 証明
 - $p = 2m'n'$ とおく
 - $m' = m$ ならば、 $n = 2n'$ となり、 n は偶数
 - $n' = n$ ならば、 $m = 2m'$ となり、 m は偶数

背理法

- 命題 $p \implies q$ を証明するために、 $\neg q$ を仮定すると矛盾が導かれることを示す
- $p \implies q$ と $\neg p \vee q$ は同値
- その否定

$$\neg(p \implies q) = \neg(\neg p \vee q) \tag{3.1}$$

$$= p \wedge \neg q \tag{3.2}$$

$$\tag{3.3}$$

- $p \wedge \neg q$ が偽であることを示す

例 3.3: 背理法

合成数 (1 より大きい素数でない自然数) は $\sqrt{n}$ 以下の素因子を持つ

- n が $\sqrt{n}$ 以下の素因子を持たないと仮定する
- $n = ab$ とおく: $1 < a \leq b < n$
- $n = ab \geq a^2$ より、 $\sqrt{n} \geq a$
- a が素数ならば、仮定と矛盾
- a が合成数ならば、更に $a = cd$ と分解 (c は素数)
 - $\sqrt{n} \geq a \geq c$ となり、仮定と矛盾

Boolean 代数

- 命題論理の計算を抽象化した計算システム (公理系) を Boolean 代数と呼ぶ

命題論理	Boolean 代数
論理積 $\wedge$	$\cdot$
論理和 $\vee$	$+$
否定 $\neg$	$-$
真 T	1 単位元、最大元
偽 F	0 零元、最小元

Boolean 代数の公理

x, y, z は Boolean 代数の元

- 交換律

$$x + y = y + x \quad (4.1)$$

$$x \cdot y = y \cdot x \quad (4.2)$$

- 結合律

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad (4.3)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad (4.4)$$

- 分配律

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (4.5)$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \quad (4.6)$$

零元、单位元、補元

- 零元

$$x + 0 = x \quad (4.7)$$

- 单位元

$$x \cdot 1 = x \quad (4.8)$$

- 補元

$$x + \bar{x} = 1 \quad (4.9)$$

$$x \cdot \bar{x} = 0 \quad (4.10)$$

その他の法則

- 零元の性質: $x \cdot 0 = 0$
- 単位元の性質: $x + 1 = 1$
- 吸収律

$$x + x \cdot y = x \quad (4.11)$$

$$x \cdot (x + y) = x \quad (4.12)$$

- 冪等律

$$x + x = x \quad (4.13)$$

$$x \cdot x = x \quad (4.14)$$

- 対合律: $\overline{\overline{x}} = x$

de Morgan の法則

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad (4.15)$$

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y} \quad (4.16)$$