

命題と論理

情報数学入門
2025 年度後期
デジタル社会共創学環 只木進一

① 命題と真理値

② 命題論理

③ 命題論理の関係

命題と真理値

- 命題: 真または偽のいずれかの値を持つ文
- 真理値: 命題が真であるか偽であることを示す値
 - 真 (True, T)
 - 偽 (False, F)
- 例:
 - 「2 は偶数である」 (真)
 - 「3 は偶数である」 (偽)
 - 「すべての自然数は一意に素因数分解できる」 (真)
- 公理、定理は命題

命題論理

- 命題論理: 命題を扱う論理体系
- 基本要素:
 - 命題変数: 命題を表す変数 (例: p, q, r)
 - 論理演算子: 命題を結合して新しい命題を作る記号
- 複雑な命題を式のように表現

例 2.1: 簡単な命題論理

- 「変数 x は 0 以上 5 以下である」
 - p : 「 x は 0 以上である」
 - q : 「 x は 5 以下である」
 - 命題: $p \wedge q$: p かつ q
- 命題が変数を含む、つまり x の値によって真偽が変わる場合を述語論理という

論理和、論理積、否定

- 論理和: 「または」 (or)

$$p \vee q \quad (2.1)$$

- 論理積: 「かつ」 (and)

$$p \wedge q \quad (2.2)$$

- 否定: 「でない」 (not)

$$\neg p \quad (2.3)$$

論理和、論理積、否定の真理値表

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg p$
T	T	T	T	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

例 2.2:

- p : x は 0 以上である
- q : x は 5 以下である

x	p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg p$
1	T	T	T	T	F
7	T	F	T	F	F
-2	F	T	T	F	T

例 2.3: 論理和と論理積のそれぞれの否定

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg(p \wedge q)$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

2つの論理式が同値

- 2つの論理式が等しい: 真理値がすべての入力に対して同じ
- 同値

$$T(p, q) \equiv S(p, q) \quad (3.1)$$

交換律、吸収律

p と q を命題変数とする。

- 交換律

$$p \vee q \equiv q \vee p \quad (3.2)$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \quad (3.3)$$

- 吸収律

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p \quad (3.4)$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad (3.5)$$

吸収律の真理値表

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

結合律、分配律

p, q, r を命題変数とする。

- 結合律

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \quad (3.6)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \quad (3.7)$$

- 分配律

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad (3.8)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad (3.9)$$

結合律の真理値表

p	q	r	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	F	F

p	q	r	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

分配律の真理値表

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

p	q	r	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

例 3.1:

- p : x は 10 以下の自然数
- q : x は偶数
- r : x は 3 の倍数

x	p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
6	T	T	T	T	T	T	T
8	T	T	F	F	F	F	F
9	T	F	T	T	T	F	T
5	T	F	F	F	F	F	F
12	F	T	T	T	F	T	T
14	F	T	F	F	F	F	F
15	F	F	T	F	F	F	F
17	F	F	F	F	F	F	F

de Morgan の法則

p と q を命題変数とする。

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \quad (3.10)$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \quad (3.11)$$

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

例 3.2: de Morgan

- p : x は 10 以下の自然数
- q : x は奇数

x	p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
9	T	T		
6	T	F		
15	F	T		
12	F	F		