

指数と対数

情報数学入門
2025 年度後期
デジタル社会共創学環 只木進一

- ① 指数関数
- ② 対数関数
- ③ 対数グラフ

累乗・べき乗

- a を正の実数、 n を自然数とするとき、 a^n を a の n 乗（累乗、べき乗）という
 - a : 底
 - n : 指数

$$a^n = a \times a \times \cdots \times a \quad (n \text{ 個の } a \text{ の積}) \quad (1.1)$$

$$= n \times n^{n-1} \quad (1.2)$$

- 任意の底 $a > 0$ に対して

$$a^0 = 1 \quad (1.3)$$

$$a^1 = a \quad (1.4)$$

指数法則

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (1.5)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (1.6)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (1.7)$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (1.8)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (1.9)$$

例 1.1: 指数

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$$

$$\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4 = 625$$

$$(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8 = 6561$$

$$(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125 = 1000$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

指数の拡張

- 指数が負の整数

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (1.10)$$

- 指数が整数の逆数

$$(a^{1/n})^n = a^{n/n} = a^1 = a \quad (1.11)$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad (1.12)$$

- 指数が有理数

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m \quad (1.13)$$

- さらに、指数を実数に拡張できる

例 1.2: 指数の拡張

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$$

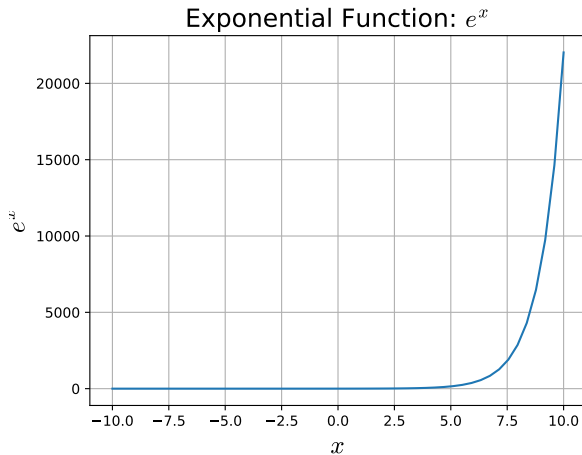
$$8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

指数関数

- Napier 数: $e \approx 2.718281828459045 \dots$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (1.14)$$

- (狭義の) 指数関数: $f(x) = e^x$
- 指数関数の性質
 - $e^0 = 1$
 - 正: $e^x > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)
 - 単調増加: $x \leq y$ ならば $e^x \leq e^y$



対数

- $a^x = b$ を満たす実数 x を a を底とする b の対数といい、

$$\log_a b = x \quad (2.1)$$

と書く

- $a > 0, a \neq 1, b > 0$
- 対数の定義より、 $a^{\log_a b} = b$
- 底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (2.2)$$

- 指数関数と対数関数は互いに逆関数
- 底が 1 より大きい対数関数は単調増加関数
 - $x \leq y$ ならば $\log_a x \leq \log_a y$

対数法則

$$\log_a 1 = 0 \quad (2.3)$$

$$\log_a a = 1 \quad (2.4)$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (2.5)$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \quad (2.6)$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a x \quad (2.7)$$

常用対数

- 底が 10 の対数を常用対数と呼ぶ

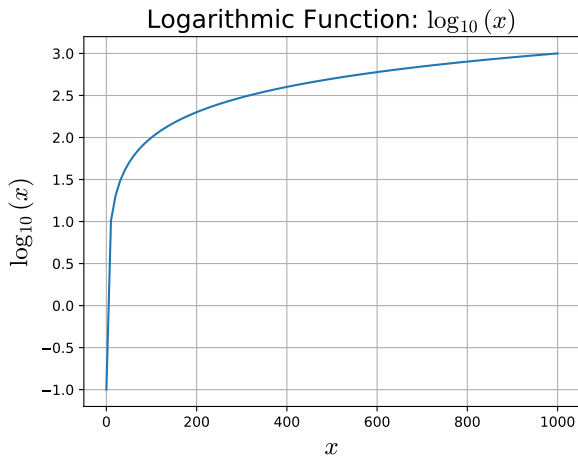
$$\log_{10} 1 = 0 \quad (2.8)$$

$$\log_{10} 10 = 1 \quad (2.9)$$

$$\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \quad (2.10)$$

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3 \quad (2.11)$$

- $\lfloor \log_{10} x \rfloor + 1$ が x の桁数に対応している



例 2.1: 常用対数の計算

$$\begin{aligned}\log_{10} 200 &= \log_{10} 2 + \log_{10} 100 \\ &= \log_{10} 2 + 2 \\ &\approx 0.3010 + 2 = 2.3010\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10} 5 &= \log_{10} \frac{10}{2} \\ &= \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \\ &= 1 - 0.3010 = 0.6990\end{aligned}$$

二進対数

- 底が 2 の対数を二進対数と呼ぶ

$$\log_2 1 = 0 \quad (2.12)$$

$$\log_2 2 = 1 \quad (2.13)$$

$$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \quad (2.14)$$

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \quad (2.15)$$

- 情報量の議論をする際に利用

自然対数

- 底が e の対数を自然対数と呼ぶ

$$\log_e 1 = 0 \quad (2.16)$$

$$\log_e e = 1 \quad (2.17)$$

$$\log_e e^2 = 2 \quad (2.18)$$

$$\log_e e^3 = 3 \quad (2.19)$$

- $\ln x = \log_e x$ と書くことが多い

対数グラフ

- 値の範囲が非常に広いデータを扱うときに有用
- x 軸、 y 軸のいずれか、または両方を対数軸にする

