

数と演算

情報数学入門
2025 年度後期
デジタル社会共創学環 只木進一

- ① 序論
- ② 数と演算
- ③ いくつかの演算
- ④ 数列と総和記号
- ⑤ 数学の論理の進め方

なぜ数学を学ぶのか

- 数学は論理的思考力を養う
 - 問題を解ける形に分解する
 - 正しい手順で解決する
- 抽象化によって一般的に適用できる解決策を見つける
- 暗記ではなく、数学的概念や方法を運用できることが重要

情報技術と数学

- コンピュータの内部は0と1の二進数で動作している
- 論理回路、ビット演算、データ
- コンピュータサイエンス: コンピュータの動作の基礎
- アルゴリズム、データ構造、暗号理論など
- 数学的な考え方が問題解決に不可欠

数とその階層構造

- 自然数 ($\mathbb{N}$): 1, 2, 3, ...
 - 物を数えるための基本的な数
 - 加法、乗法について閉じている
- 整数 ($\mathbb{Z}$): ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
 - 自然数に負の数と 0 を加えたもの
 - 減法についても閉じている
- 有理数 ($\mathbb{Q}$): 分数で表せる数
 - 整数の比として表現可能
 - 除法についても閉じている (0 で割ることを除く)
- 実数 ($\mathbb{R}$): 有理数と無理数を含む
 - 数直線上のすべての点を表す
 - 連続性を持つ

小数と無理数

- 終了小数: 有理数、有限桁の小数

$$\frac{1}{2} = 0.5, \frac{1}{8} = 0.125, \dots$$

- 循環小数: 有理数、無限に続くが循環する小数

$$\frac{1}{3} = 0.333\dots, \frac{1}{6} = 0.1666\dots, \frac{1}{11} = 0.090909\dots$$

- 循環しない無限小数: 無理数

$$\pi = 3.1415926535\dots, e = 2.7182818284\dots, \sqrt{2} = 1.4142135623\dots$$

記号の使用

- 変数: 具体的な値を表しはしないが、数値を表すために使用される文字
 - 通常は小文字のアルファベットを使用 (例: x , y , n)
 - イタリック体
- 定数: 特定の値を持つ記号
 - 数学定数: π , e , など
- ギリシャ文字の使用

四則演算

- 加法: $a + b$
- 減法: $a - b$
- 乗法: $a \times b$ または ab または $a \cdot b$
- 除法: $\frac{a}{b}$ または a/b ($b \neq 0$)
- 演算の優先順位
 - 乗法と除法は加法と減法よりも優先順位が高い
 - 同じ優先順位の演算は左から右へ評価
 - 括弧は最も優先順位が高い

$$3 + 5 \times 2 = 3 + (5 \times 2) = 3 + 10 = 13$$
$$(3 + 5) \times 2 = 8 \times 2 = 16$$

複素数

- 二次方程式 $x^2 + 1 = 0$ の解
- $i = \sqrt{-1}$ を導入すると解くことができる。

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$$

- i を虚数単位と呼ぶ
- a と b を実数とすると、 $a + bi$ の形で表される数を複素数と呼ぶ
- 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$

複素数の計算

- 加法:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

- 減法:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

- 乗法:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- 除法:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

- $x = a + bi$ の共役複素数: $x^* = a - bi$

例 2.1: 複素数の計算

$$(2 + 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (3 + 5)i = 6 + 8i$$

$$(2 + 3i) - (4 + 5i) = (2 - 4) + (3 - 5)i = -2 - 2i$$

$$(2 + 3i)(4 + 5i) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5) + (2 \cdot 5 + 3 \cdot 4)i = -7 + 22i$$

$$\begin{aligned}\frac{2 + 3i}{4 + 5i} &= \frac{(2 + 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} \\ &= \frac{(8 + 15) + (12 - 10)i}{16 + 25} = \frac{23 + 2i}{41}\end{aligned}$$

一般の二次方程式

- 一般の二次方程式: $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c は実数、 $a \neq 0$)
- 解の公式:

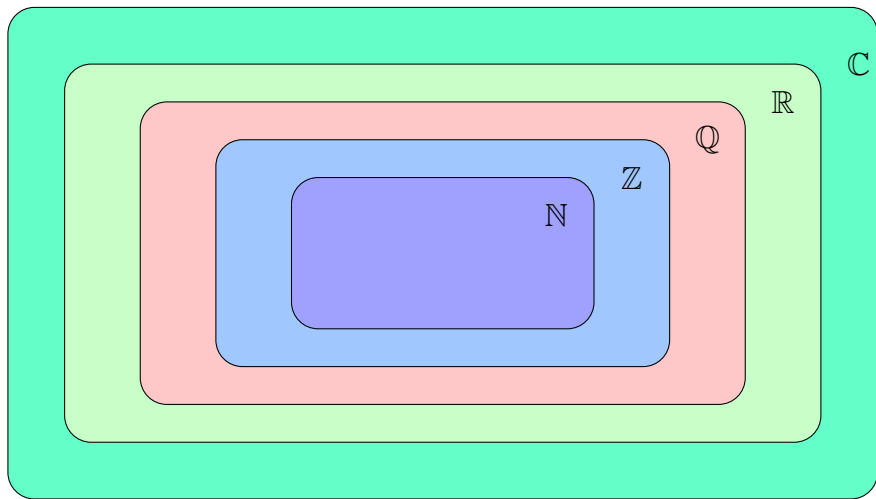
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 判別式: $D = b^2 - 4ac$
 - $D > 0$: 異なる 2 つの実数解
 - $D = 0$: 重解 (1 つの実数解)
 - $D < 0$: 異なる 2 つの複素数解

例 2.2: 二次方程式

- $x^2 - 3x + 2 = 0$ の解
 - $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$
 - 解: $x = \frac{3 \pm 1}{2} = 1, 2$
- $x^2 + 2x + 5 = 0$ の解
 - $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$
 - 解: $x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i$

数とその階層構造



絶対値、床関数、天井関数

- 絶対値: 数の大きさを表す

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

- 床関数 (Gauss 記号): x 以下の最大の整数を返す

$$\lfloor x \rfloor = \text{最大の整数 } n \text{ で } n \leq x$$

- 天井関数: x 以上の最小の整数を返す

$$\lceil x \rceil = \text{最小の整数 } n \text{ で } n \geq x$$

- 不等号の記号に注意: $\leq \rightarrow \leq, \geq \rightarrow \geq$

例 3.1: 絶対値、床関数、天井関数

- $|-3| =$
- $|2| =$
- $\lfloor 3.9 \rfloor =$
- $\lfloor -2.1 \rfloor =$
- $\lceil 4.2 \rceil =$
- $\lceil -2.1 \rceil =$

数列

- 数の列を数列と呼ぶ
- 例:
 - 正の偶数の列: $2, 4, 6, 8, \dots$
 - 素数の列: $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$
- 数列の要素を「項」と呼び以下のように表す

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

- 情報技術では、0 から始まることが多い
- 項の値を n の関数として表すこともある
- 正の偶数の列: $a_n = 2(n + 1)$

総和記号

- 数列の項をすべて足し合わせることを総和と呼ぶ
- 総和を表すために総和記号 Σ を使用する
- 例: 正の偶数の最初の n 項の総和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

- 具体例: $n = 4$ の場合

$$S_4 = \sum_{i=0}^3 2(i+1) = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

階乗

- 階乗

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

- 再帰的定義: $0! = 1$ として

$$n! = n \times (n - 1)!$$

組み合わせ

- n 個のものから r 個を選ぶ組み合わせの数: 高校では ${}_nC_r$ と表記

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- 二項係数と呼ぶ
- 例: 5 個の中から 2 個を選ぶ組み合わせの数

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{120}{2 \times 6} = 10$$

定義、命題

- 数学では、定義によって用語や概念を明確に定める
- 命題: 真偽が定まる文
- 定義と数学的論理に基づいて、命題の真偽を証明する

公理と定理

- 公理: 議論の出発点となる基本的な命題
 - 証明を必要としない
 - 互いに矛盾しないことが重要
- 定理: 公理や他の定理から論理的に導かれる (証明できる) 命題

例 5.1: Euclid 幾何学の公理

- ① 任意の 2 点を結ぶ直線はただ 1 本存在する
- ② 任意の直線を両方向に無限に延長することができる
- ③ 任意の中心と半径で円を 1 つ描くことができる
- ④ すべての直角は等しい
- ⑤ ある直線とその直線上にない点を与えられたとき、その点を通り、与えられた直線と交わらない直線はただ 1 本存在する