学籍番号									氏名	

学籍番号と氏名は丁寧に記載すること

「離散数学・オートマトン」確認テスト

2024/10/28

問 1　集合 $A = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ 上の関係

$$R = \{(\mathrm{a}, \mathrm{a}), (\mathrm{a}, \mathrm{b}), (\mathrm{b}, \mathrm{d}), (\mathrm{c}, \mathrm{a})\} \tag{1}$$

$$S = \{(\mathrm{a}, \mathrm{c}), (\mathrm{a}, \mathrm{d}), (\mathrm{b}, \mathrm{c})\} \tag{2}$$

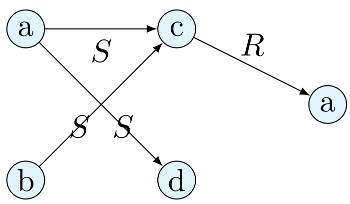
に対して、$R \circ S$、R^2、S^2 を求めよ。

For relations R and S defined in (1) and (2), find $R \circ S$, R^2, and S^2.

解答例

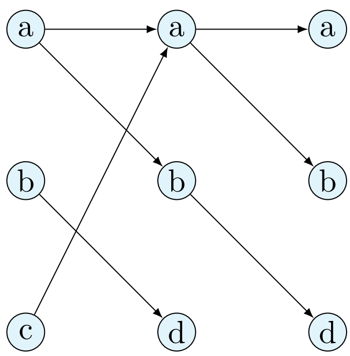
- $R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \wedge zRy\}$ であることから
  By definition, $R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \wedge zRy\}$, we have

$$R \circ S = \{(\mathrm{a}, \mathrm{a}), (\mathrm{b}, \mathrm{a})\}$$



- $R^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xRz \wedge zRy\}$ であることから
  By the definition, $R^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xRz \wedge zRy\}$, we have

$$R^2 = \{(\mathrm{a}, \mathrm{a}), (\mathrm{a}, \mathrm{b}), (\mathrm{a}, \mathrm{d}), (\mathrm{c}, \mathrm{a}), (\mathrm{c}, \mathrm{b})\}$$



- $S^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \land zSy\}$ であることから
  Finally, by the definition, $S^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \land zSy\}$, we have
  $$S^2 = \emptyset$$

問 2　N 上の関係 R を $nRm = \{(n, m) \mid m \bmod n = 0\}$、つまり n は m を割り切る、で定義する。このとき、R は、N 上の半順序であって、全順序でないことを示しなさい。

Let R be a relation on N defined by $nRm = \{(n, m) \mid m \bmod n = 0\}$, i.e., n divides m. Show that R is a partial order on N and not a total order.

解答例　はじめに、反射律、推移律、反対称律を示すことで半順序であることを示す。

Firstly, we show that R is a partial order by demonstrating the reflexive, transitive, and antisymmetric properties.

- 反射律：$\forall n \in N$ に対して nRn は明らか
  Reflexive: nRn is obvious for all $n \in N$.
- 推移律：nRm かつ $mR\ell$ とは、m が n の倍数であり、かつ ℓ が m の倍数であることである。従って、ℓ は n の倍数となり、$nR\ell$ が成り立つ。
  Transitive: nRm and $mR\ell$ means that m is a multiple of n and ℓ is a multiple of m. Therefore, ℓ is a multiple of n, and $nR\ell$ holds.
- 反対称律：nRm かつ mRn とは、m が n の倍数であり、かつ n が m の倍数であることである。つまり、$n = m$ である。
  Antisymmetric: nRm and mRn means that m is a multiple of n and n is a multiple of m. Therefore, $n = m$.

以上から、半順序であることが分かった。We have shown that R is a partial order.

N の任意の要素の組 (x, y) に対して関係 R を考えると、関係が成立しない組を例示することができる。例えば、$(3, 5)$ と $(5, 3)$ のいずれにも関係 R は成立しない。つまり、関係 R は全順序ではない。

For any pair (x, y) of elements in N, we can provide examples of pairs for which the relation R does not hold. For example, neither $(3, 5)$ nor $(5, 3)$ satisfies the relation R. Therefore, the relation R is not a total order.