「離散数学・オートマトン」演習問題 14 (解答例)

2025/1/27

1　文脈自由文法: Context-Free Grammar (CFG)

課題 1　式 (1.1) で定義する文脈自由文法 $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ を考える。生成規則 P は式 (1.2) に示す。
Let us consider the context-free grammar $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ defined by (1.1). The production rules P are shown in (1.2).

$$\begin{aligned} N &= \{S, A, B\} \\ \Sigma &= \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} S &\to \mathrm{a}SA|\mathrm{b}SB|\mathrm{a}|\mathrm{b}|\epsilon \\ A &\to \mathrm{a} \\ B &\to \mathrm{b} \end{aligned} \tag{1.2}$$

このとき、aababaa を生成する過程を示しなさい。
Show the process to generate aababaa.
解答例

$$\begin{aligned} S &\to \mathrm{a}SA \\ &\to \mathrm{aa}SAA \\ &\to \mathrm{aab}SBAA \\ &\to \mathrm{aaba}BAA \\ &\to \mathrm{aabab}AA \\ &\to \mathrm{aababa}A \\ &\to \mathrm{aababaa} \end{aligned}$$

2　文脈自由文法からプッシュダウンオートマトンへ: CFG to PDA

課題 2　課題 1 で示した文脈自由文法に対応した非決定性プッシュダウンオートマトンを構成しなさい。
Construct a non-deterministic pushdown automaton corresponding to the context-free grammar shown in Exercise 1.
解答例　対応する非決定性プッシュダウンオートマトン $M = \langle \{q\}, \Sigma, N, \delta, q, S, \emptyset \rangle$ を構成する。各生成規則に対応して遷移関数を定義する。
We construct a non-deterministic pushdown automaton $M = \langle \{q\}, \Sigma, N, \delta, q, S, \emptyset \rangle$ corresponding to the grammar. The transition function is defined for each production rule.

- $S \to \mathrm{a}SA|\mathrm{b}SB|\mathrm{a}|\mathrm{b}|\epsilon$

$$\begin{aligned}
\delta(q, \mathrm{a}, S) &= \{(q, SA), (q, \epsilon)\} \\
\delta(q, \mathrm{b}, S) &= \{(q, SB), (q, \epsilon)\} \\
\delta(q, \epsilon, S) &= \{(q, \epsilon)\}
\end{aligned}$$

- $A \to \mathrm{a}$

$$\delta(q, \mathrm{a}, A) = \{(q, \epsilon)\}$$

- $B \to \mathrm{b}$

$$\delta(q, \mathrm{b}, B) = \{(q, \epsilon)\}$$

aababaa を受理する過程を示す。
We show the process to accept aababaa.

$$\begin{aligned}
(q, \mathrm{aababaa}, S) &\vdash (q, \mathrm{ababaa}, SA) \\
&\vdash (q, \mathrm{babaa}, SAA) \\
&\vdash (q, \mathrm{abaa}, SBAA) \\
&\vdash (q, \mathrm{baa}, BAA) \\
&\vdash (q, \mathrm{aa}, AA) \\
&\vdash (q, \mathrm{a}, A) \\
&\vdash (q, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}$$

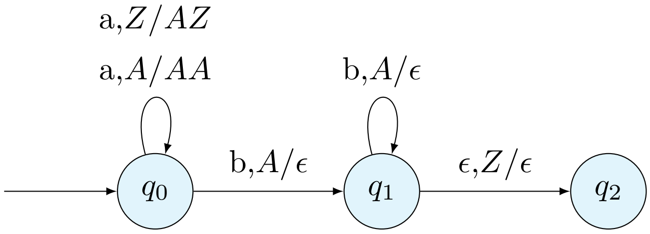

図 1　PDA to CFG

3　空スタックで受理するプッシュダウンオートマトンから文脈自由文法へ: PDA to CFG

課題 3　式 (3.1) 及び図 1 で定義する空スタックで受理するプッシュダウンオートマトン M に対応する文脈自由文法 G を構成しなさい。
Construct a context-free grammar G corresponding to the pushdown automaton M that accepts with an empty stack defined by (3.1) and Figure 1.

$$M = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \{A, Z\}, \delta, q_0, Z, \emptyset \rangle \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
&\delta(q_0, \mathrm{a}, Z) = \{(q_0, AZ)\}, && \delta(q_0, \mathrm{a}, A) = \{(q_0, AA)\}, \\
&\delta(q_0, \mathrm{b}, A) = \{(q_1, \epsilon)\}, && \\
&\delta(q_1, \mathrm{b}, A) = \{(q_1, \epsilon)\}, && \delta(q_1, \epsilon, Z) = \{(q_2, \epsilon)\}.
\end{aligned}$$

解答例

$$G = \langle N, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, P, S \rangle$$

- 開始記号: Start symbol

$$S \to [q_0 Z q_0] \mid [q_0 Z q_1] \mid [q_0 Z q_2]$$

- $(q_0, AZ) \in \delta(q_0, \mathrm{a}, Z)$ より:

$$\begin{aligned}
[q_0 Z q_0] &\to \mathrm{a}\,[q_0 A q_0]\,[q_0 Z q_0] \mid \mathrm{a}\,[q_0 A q_1]\,[q_1 Z q_0] \mid \mathrm{a}\,[q_0 A q_2]\,[q_2 Z q_0] \\
[q_0 Z q_1] &\to \mathrm{a}\,[q_0 A q_0]\,[q_0 Z q_1] \mid \mathrm{a}\,[q_0 A q_1]\,[q_1 Z q_1] \mid \mathrm{a}\,[q_0 A q_2]\,[q_2 Z q_1] \\
[q_0 Z q_2] &\to \mathrm{a}\,[q_0 A q_0]\,[q_0 Z q_2] \mid \mathrm{a}\,[q_0 A q_1]\,[q_1 Z q_2] \mid \mathrm{a}\,[q_0 A q_2]\,[q_2 Z q_2]
\end{aligned}$$

- $(q_0, AA) \in \delta(q_0, \mathrm{a}, A)$ より

$$
\begin{aligned}
[q_0 Z q_0] &\to \mathrm{a}\,[q_0 A q_0]\,[q_0 A q_0]\,|\mathrm{a}\,[q_0 A q_1]\,[q_1 A q_0]\,|\mathrm{a}\,[q_0 A q_2]\,[q_2 A q_0] \\
[q_0 Z q_1] &\to \mathrm{a}\,[q_0 A q_0]\,[q_0 A q_1]\,|\mathrm{a}\,[q_0 A q_1]\,[q_1 A q_1]\,|\mathrm{a}\,[q_0 A q_2]\,[q_2 A q_1] \\
[q_0 Z q_2] &\to \mathrm{a}\,[q_0 A q_0]\,[q_0 A q_2]\,|\mathrm{a}\,[q_0 A q_1]\,[q_1 A q_2]\,|\mathrm{a}\,[q_0 A q_2]\,[q_2 A q_2]
\end{aligned}
$$

- $(q_1, \epsilon) \in \delta(q_0, \mathrm{b}, A)$ より
$$[q_0 A q_1] \to \mathrm{b}$$

- $(q_1, \epsilon) \in \delta(q_1, \mathrm{b}, A)$ より
$$[q_1 A q_1] \to \mathrm{b}$$

- $(q_2, \epsilon) \in \delta(q_1, \epsilon, Z)$ より
$$[q_1 Z q_2] \to \epsilon$$

終端記号を導かない要素を除くと、生成規則は以下のようになる。
The production rules are as follows, excluding elements that do not derive terminal symbols.

$$
\begin{aligned}
S &\to [q_0 Z q_2] \\
[q_0 Z q_2] &\to \mathrm{a}\,[q_0 A q_1]\,[q_1 Z q_2] \\
[q_0 A q_1] &\to \mathrm{a}\,[q_0 A q_1]\,[q_1 A q_1]\,|\mathrm{b} \\
[q_1 A q_1] &\to \mathrm{b} \\
[q_1 Z q_2] &\to \epsilon
\end{aligned}
$$