「離散数学・オートマトン」演習問題 11 (解答例)

2024/12/16

1 非決定性有限オートマトンから決定性有限オートマトンへ: NFA to DFA

課題 1 式 (1.1) で定義する非決定性有限オートマトン $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ を考える。遷移関数は図 1 に示す。

Let us consider a non-deterministic finite automaton $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ defined by Eq. (1.1). The transition function is shown in Fig. 1.

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} \\
\Sigma &= \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} \\
F &= \{q_3\}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

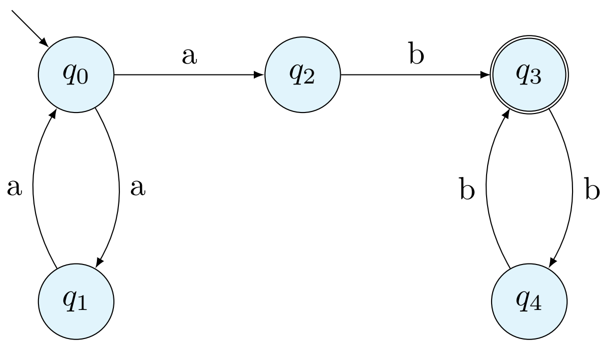


図 1 NFA M

このとき、同じ文字列を受理する決定性有限オートマトンを構成しなさい。

Construct a deterministic finite automaton that accepts the same strings as M.

解答例 対応する決定性有限オートマトン $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', [q_0], F' \rangle$ を構成するために、

Q' と δ' をアルゴリズムに従って構成する。
We construct a deterministic finite automaton $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', [q_0], F' \rangle$ that accepts the same strings as M by building Q' and δ' according to the algorithm.

- $[q_0]$ を起点とする遷移: Transition from $[q_0]$

$$\delta'([q_0], \mathrm{a}) = [q_1, q_2]$$

- $[q_1, q_2]$ を起点とする遷移: Transition from $[q_1, q_2]$

$$\delta'([q_1, q_2], \mathrm{a}) = [q_0]$$
$$\delta'([q_1, q_2], \mathrm{b}) = [q_3]$$

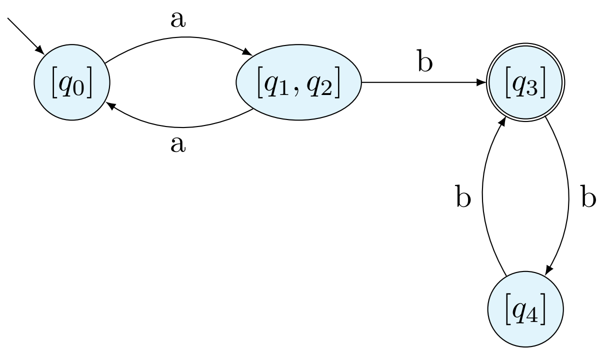
- $[q_3]$ を起点とする遷移: Transition from $[q_3]$

$$\delta'([q_3], \mathrm{b}) = [q_4]$$

- $[q_4]$ を起点とする遷移: Transition from $[q_4]$

$$\delta'([q_4], \mathrm{b}) = [q_3]$$

M の受理状態は $F' = \{[q_3]\}$ となる。状態遷移を図示する。
The accepting states of M' are $F' = \{[q_3]\}$. The state transitions are shown in the figure.



課題 2　式 (1.2) で定義する非決定性有限オートマトン $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ を考える。遷移関数は図 2 に示す。
Let us consider a non-deterministic finite automaton $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ defined by

Eq. (1.2). The transition function is shown in Fig. 2.

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2\} \\
\Sigma &= \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} \\
F &= \{q_2\}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

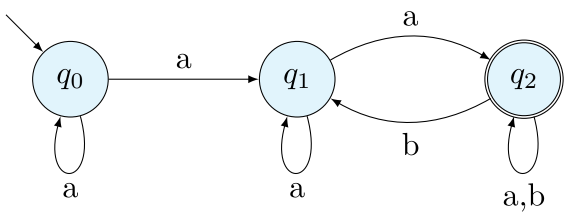


図 2　NFA M

このとき、同じ文字列を受理する決定性有限オートマトンを構成しなさい。
Construct a deterministic finite automaton that accepts the same strings as M.

解答例　対応する決定性有限オートマトン $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', [q_0], F' \rangle$ を構成するために、Q' と δ' をアルゴリズムに従って構成する。
We construct a deterministic finite automaton $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', [q_0], F' \rangle$ that accepts the same strings as M by building Q' and δ' according to the algorithm.

- $[q_0]$ を起点とする遷移: Transition from $[q_0]$

$$\delta'([q_0], \mathrm{a}) = [q_0, q_1]$$

- $[q_0, q_1]$ を起点とする遷移: Transition from $[q_0, q_1]$

$$\delta'([q_0, q_1], \mathrm{a}) = [q_0, q_1, q_2]$$

- $[q_0, q_1, q_2]$ を起点とする遷移: Transition from $[q_0, q_1, q_2]$

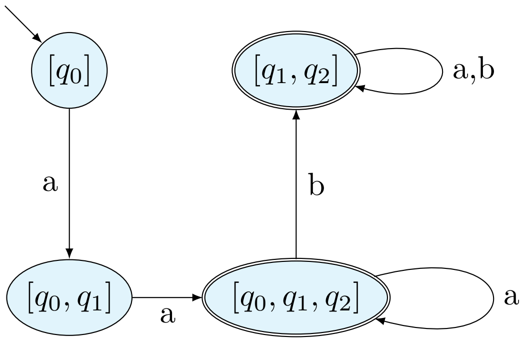
$$
\begin{aligned}
\delta'([q_0, q_1, q_2], \mathrm{a}) &= [q_0, q_1, q_2] \\
\delta'([q_0, q_1, q_2], \mathrm{b}) &= [q_1, q_2]
\end{aligned}
$$

- $[q_1, q_2]$ を起点とする遷移: Transition from $[q_1, q_2]$

$$
\begin{aligned}
\delta'([q_1, q_2], \mathrm{a}) &= [q_1, q_2] \\
\delta'([q_1, q_2], \mathrm{b}) &= [q_1, q_2]
\end{aligned}
$$

M の受理状態は $F' = \{[q_0, q_1, q_2], [q_1, q_2]\}$ となる。状態遷移を図示する。

The accepting states of M' are $F' = \{[q_0, q_1, q_2], [q_1, q_2]\}$. The state transitions are shown in the figure.



2 ϵ 動作のある非決定性有限オートマトンから決定性有限オートマトンへ: NFA with ϵ-transitions to DFA

課題 3 　式 (2.1) で定義する ϵ 動作のある非決定性有限オートマトン $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ を考える。遷移関数は図 3 に示す。

Let us consider a non-deterministic finite automaton with ϵ-transitions $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ defined by Eq. (2.1). The transition function is shown in Fig. 3.

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} \\
\Sigma &= \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} \\
F &= \{q_4\}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

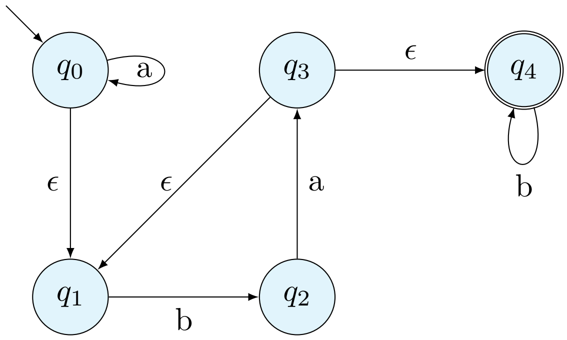


図 3　NFA M

このとき、同じ文字列を受理する決定性有限オートマトンを構成しなさい。
Construct a deterministic finite automaton that accepts the same strings as M.
解答例　対応する決定性有限オートマトン $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$ を構成するために、Q' と δ' をアルゴリズムに従って構成する。
We construct a deterministic finite automaton $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$ that accepts the same strings as M by building Q' and δ' according to the algorithm.

今回は ϵ-動作があるために、初期状態の構築から始める。
Since there are ϵ-transitions, we start by building the initial state.

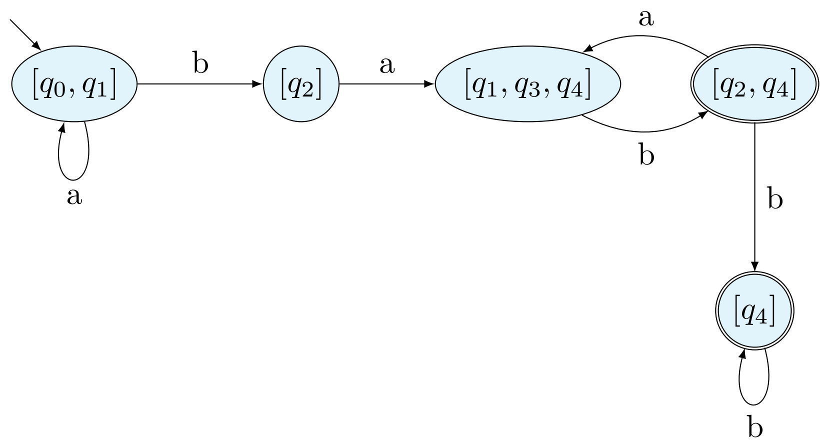
- q_0 を起点とする ϵ-閉包を初期状態とする。: The initial state is the ϵ-closure starting from q_0.
$$q_0' = [q_0, q_1]$$
- $[q_0, q_1]$ を起点とする遷移: Transition from $[q_0, q_1]$
$$\begin{aligned}\delta'([q_0, q_1], \mathrm{a}) &= \delta(q_0, \mathrm{a}) \cup \delta(q_1, \mathrm{a}) = [q_0, q_1] \\ \delta'([q_0, q_1], \mathrm{b}) &= [q_2]\end{aligned}$$
- $[q_2]$ を起点とする遷移。q_3 から ϵ-遷移があることに留意。: Transition from $[q_2]$. Note that there is an ϵ-transition from q_3.
$$\delta'([q_2], \mathrm{a}) \cup \epsilon\text{-CL}(q_3) = [q_1, q_3, q_4]$$
- $[q_1, q_3, q_4]$ を起点とする遷移: Transition from $[q_1, q_3, q_4]$
$$\delta'([q_1, q_3, q_4], \mathrm{b}) = [q_2, q_4]$$

- $[q_2, q_4]$ を起点とする遷移: Transition from $[q_2, q_4]$

$$\delta'([q_2, q_4], \mathrm{a}) = [q_1, q_3, q_4]$$
$$\delta'([q_2, q_4], \mathrm{b}) = [q_4]$$

- $[q_4]$ を起点とする遷移: Transition from $[q_4]$

$$\delta'([q_4], \mathrm{b}) = [q_4]$$



課題 4　式 (2.2) で定義する ϵ 動作のある非決定性有限オートマトン $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ を考える。遷移関数は図 4 に示す。

Let us consider a non-deterministic finite automaton with ϵ-transitions $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ defined by Eq. (2.2). The transition function is shown in Fig. 4.

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\ \Sigma &= \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} \\ F &= \{q_3\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

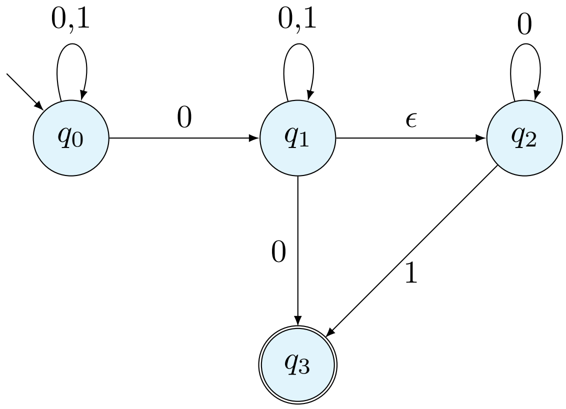


図 4　NFA M

このとき、同じ文字列を受理する決定性有限オートマトンを構成しなさい。

Construct a deterministic finite automaton that accepts the same strings as M.

解答例

- $[q_0]$ から: From $[q_0]$

$$\delta\left([q_0], 0\right) = \{q_0, q_1\} \cup \epsilon\text{-CL}\left(q_1\right) = \{q_0, q_1\} \cup \{q_1, q_2\} = [q_0, q_1, q_2]$$
$$\delta\left([q_0], 1\right) = [q_0]$$

- $[q_0, q_1, q_2]$ から: From $[q_0, q_1, q_2]$

$$\begin{aligned}\delta\left([q_0, q_1, q_2], 0\right) &= \delta\left([q_0], 0\right) \cup \delta\left(q_1, 0\right) \cup \delta\left(q_2, 0\right) \\ &= [q_0, q_1, q_2] \cup \{q_3\} = [q_0, q_1, q_2, q_3] \\ \delta\left([q_0, q_1, q_2], 1\right) &= \delta\left([q_0], 1\right) \cup \epsilon\text{-CL}\left(q_1\right) \cup \delta\left(q_2, 1\right) \\ &= \{q_0\} \cup \{q_1, q_2\} \cup \{q_3\} = [q_0, q_1, q_2, q_3]\end{aligned}$$

- $[q_0, q_1, q_2, q_3]$ から: From $[q_0, q_1, q_2, q_3]$

$$\delta\left([q_0, q_1, q_2, q_3], 0\right) = \delta\left([q_0, q_1, q_2], 0\right) = [q_0, q_1, q_2, q_3]$$
$$\delta\left([q_0, q_1, q_2, q_3], 1\right) = \delta\left([q_0, q_1, q_2], 1\right) = [q_0, q_1, q_2, q_3]$$