「離散数学・オートマトン」演習問題 04 (解答例)

2024/10/28

1　関係: Relations

課題 1　N 上の関係 R と S を

$$R = \{(m, n) \mid m = 2n\} \tag{1.1}$$

$$S = \{(m, n) \mid m = n + 3\} \tag{1.2}$$

とするとき、$R \circ S$、R^2、R^{-1} を求めなさい。

Consider the relations R and S on N defined by Eqs. (1.1) and (1.2). Find $R \circ S$, R^2, and R^{-1}.

解答例

- $R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \wedge zRy\}$ は
  $R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \wedge zRy\}$ is equivalent to

  $$R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z, x = z + 3 \wedge z = 2y\}$$

  である。これより以下を得る。
  This implies

  $$R \circ S = \{(m, n) \mid m = 2n + 3\}$$

- $R^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xRz \wedge zRy\}$ は
  $R^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xRz \wedge zRy\}$ is equivalent to

  $$R^2 = \{(x, y) \mid \exists z, x = 2z \wedge z = 2y\}$$

  である。これより以下を得る。
  This implies

  $$R \circ R = \{(m, n) \mid m = 4n\}$$

- $$R^{-1} = \{(m, n) \mid 2m = n\}$$

課題 2　$\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ 上の関係を考える。

Consider the relation on $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$.

$$R = \{(\mathrm{a}, \mathrm{a}), (\mathrm{a}, \mathrm{b}), (\mathrm{b}, \mathrm{d}), (\mathrm{c}, \mathrm{d}), (\mathrm{d}, \mathrm{b})\} \tag{1.3}$$

$R^i = R^j$ となる最小の $i \neq j$ の組を求めよ。また、R^* を求めよ。

Find the smallest pair of $i \neq j$ such that $R^i = R^j$. Also, find R^*.

解答例　R^2 を求める。

First we obtain R^2.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{a}R\mathrm{a} \land \mathrm{a}R\mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{a}R^2\mathrm{a}\\
&\mathrm{a}R\mathrm{a} \land \mathrm{a}R\mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{a}R^2\mathrm{b}\\
&\mathrm{a}R\mathrm{b} \land \mathrm{b}R\mathrm{d} \Rightarrow \mathrm{a}R^2\mathrm{d}\\
&\mathrm{b}R\mathrm{d} \land \mathrm{d}R\mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{b}R^2\mathrm{b}\\
&\mathrm{c}R\mathrm{d} \land \mathrm{d}R\mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{c}R^2\mathrm{b}\\
&\mathrm{d}R\mathrm{b} \land \mathrm{b}R\mathrm{d} \Rightarrow \mathrm{d}R^2\mathrm{d}
\end{aligned}$$

同様に R^3 と R^4 を求める。

Similarly, we obtain R^3 and R^4.

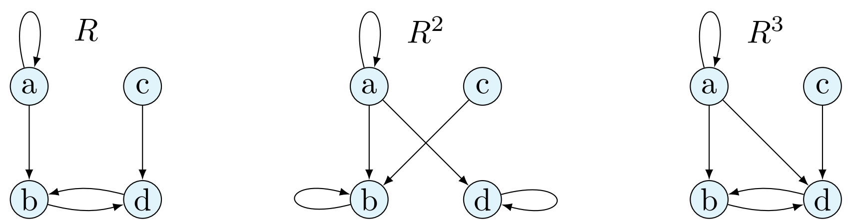
$$\begin{aligned}
&\mathrm{a}R^2\mathrm{a} \land \mathrm{a}R\mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{a}R^3\mathrm{a}\\
&\mathrm{a}R^2\mathrm{a} \land \mathrm{a}R\mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{a}R^3\mathrm{b}\\
&\mathrm{a}R^2\mathrm{b} \land \mathrm{b}R\mathrm{d} \Rightarrow \mathrm{a}R^3\mathrm{d}\\
&\mathrm{b}R^2\mathrm{b} \land \mathrm{b}R\mathrm{d} \Rightarrow \mathrm{b}R^3\mathrm{d}\\
&\mathrm{c}R^2\mathrm{b} \land \mathrm{b}R\mathrm{d} \Rightarrow \mathrm{c}R^3\mathrm{d}\\
&\mathrm{d}R^2\mathrm{d} \land \mathrm{d}R\mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{d}R^3\mathrm{b}
\end{aligned}$$

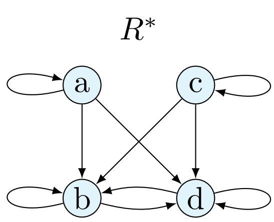
$$
\begin{aligned}
\mathrm{a}R^3\mathrm{a} \wedge \mathrm{a}R\mathrm{a} &\Rightarrow \mathrm{a}R^4\mathrm{a} \\
\mathrm{a}R^3\mathrm{a} \wedge \mathrm{a}R\mathrm{b} &\Rightarrow \mathrm{a}R^4\mathrm{b} \\
\mathrm{a}R^3\mathrm{b} \wedge \mathrm{b}R\mathrm{d} &\Rightarrow \mathrm{a}R^4\mathrm{d} \\
\mathrm{a}R^3\mathrm{d} \wedge \mathrm{d}R\mathrm{b} &\Rightarrow \mathrm{a}R^4\mathrm{b} \\
\mathrm{b}R^3\mathrm{d} \wedge \mathrm{d}R\mathrm{b} &\Rightarrow \mathrm{b}R^4\mathrm{b} \\
\mathrm{c}R^3\mathrm{d} \wedge \mathrm{d}R\mathrm{b} &\Rightarrow \mathrm{c}R^4\mathrm{b} \\
\mathrm{d}R^3\mathrm{b} \wedge \mathrm{b}R\mathrm{d} &\Rightarrow \mathrm{d}R^4\mathrm{d}
\end{aligned}
$$

以上から $R^2 = R^4$ を得る。従って、$R^* = R^0 \cup R \cup R^2 \cup R^3$ となる。しかし、R^3 の要素は $R^0 \cup R \cup R^2$ に含まれているため、$R^* = R^0 \cup R \cup R^2$ で十分である。

Thus, we have $R^2 = R^4$. Therefore, $R^* = R^0 \cup R \cup R^2 \cup R^3$. However, the elements of R^3 are included in $R^0 \cup R \cup R^2$, so $R^* = R^0 \cup R \cup R^2$ is sufficient.

$$
\begin{aligned}
R^* = {} & \{(\mathrm{a},\mathrm{a}),(\mathrm{b},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{c}),(\mathrm{d},\mathrm{d})\} \cup \{(\mathrm{a},\mathrm{a}),(\mathrm{a},\mathrm{b}),(\mathrm{b},\mathrm{d}),(\mathrm{c},\mathrm{d}),(\mathrm{d},\mathrm{b})\} \\
& \cup \{(\mathrm{a},\mathrm{a}),(\mathrm{a},\mathrm{b}),(\mathrm{a},\mathrm{d}),(\mathrm{b},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{b}),(\mathrm{d},\mathrm{d})\} \\
= {} & \{(\mathrm{a},\mathrm{a}),(\mathrm{b},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{c}),(\mathrm{d},\mathrm{d}),(\mathrm{a},\mathrm{b}),(\mathrm{a},\mathrm{d}),(\mathrm{b},\mathrm{d}),(\mathrm{c},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{d}),(\mathrm{d},\mathrm{b})\}
\end{aligned}
$$





この課題に対応するコードは、以下の Github から取得できます。

The code corresponding to this exercise can be obtained from the following Github.

`https://github.com/discrete-math-saga/RelationsAndOrder/`

課題 3　R 上の以下の関係 S を考える。この関係は同値関係であることを示せ。

Consider the relation S on R defined as follows. Show that this relation is an equivalence relation.

$$S = \{(x, y) \mid \sin(x) = \sin(y), x, y \in R\} \tag{1.4}$$

解答例 S が反射律、対称律、推移律を満たすことを示す。

We show that S satisfies the reflexive, symmetric, and transitive properties.

- 反射律：$\sin(x) = \sin(x)$ より、$(x, x) \in S$ である。
  Reflexive: Since $\sin(x) = \sin(x)$, $(x, x) \in S$.
- 対称律：$\sin(x) = \sin(y)$ ならば、$\sin(y) = \sin(x)$ である。つまり $xSy \Leftrightarrow ySx$ である。
  Symmetric: If $\sin(x) = \sin(y)$, then $\sin(y) = \sin(x)$. That is, $xSy \Leftrightarrow ySx$.
- 推移律：$\sin(x) = \sin(y) \wedge \sin(y) = \sin(z)$ ならば、$\sin(x) = \sin(z)$ である。つまり $xSy \wedge ySz \Rightarrow xSz$ である。
  Transitive: If $\sin(x) = \sin(y) \wedge \sin(y) = \sin(z)$, then $\sin(x) = \sin(z)$. That is, $xSy \wedge ySz \Rightarrow xSz$.

以上より、S は同値関係である。

Therefore, S is an equivalence relation.

2 順序: Orders

課題 4 全体集合 U を考える。その部分集合 $A \subseteq U$ に対する関係 $\subseteq$ は、半順序であって全順序でないことを示せ。

Consider the whole set U. Show that the relation $\subseteq$ on the subset $A \subseteq U$ is a partial order but not a total order.

解答例 はじめに、反射律、推移律、反対称律を示し、半順序であることを示す。

First, we show the reflexive, transitive, and antisymmetric properties to demonstrate that it is a partial order.

- 反射律：ある集合 A について、$A \subseteq A$ は明らか
  Reflexive: For any set A, $A \subseteq A$ is obvious.
- 推移律：$C \subseteq B \wedge B \subseteq A$ ならば、$C \subseteq A$ である。

Transitive: If $C \subseteq B \land B \subseteq A$, then $C \subseteq A$.

- 反対称律：$B \subseteq A \land A \subseteq B$ ならば、$A = B$ である。
  Antisymmetric: If $B \subseteq A \land A \subseteq B$, then $A = B$.

次に、二つの集合 $A \subseteq U$ と $B \subseteq U$ を考える。$A \cap B$ が A または B と等しくない場合、A と B の間には関係 $\subseteq$ は成り立たない。つまり、関係 $\subseteq$ は全順序ではない。

Next, consider two sets $A \subseteq U$ and $B \subseteq U$. If $A \cap B$ is not equal to A or B, the relation $\subseteq$ does not hold between A and B. That is, the relation $\subseteq$ is not a total order.