非決定性有限オートマトンと決定性有限オートマトン

離散数学・オートマトン
2024 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

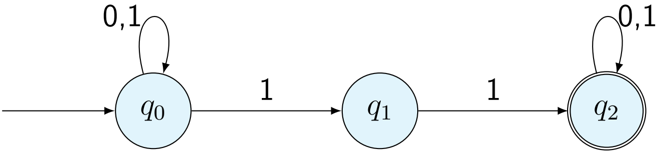
1. 非決定性有限オートマトン: NFA
2. NFA から DFA へ: Converting from NFA to DFA
3. ϵ-動作のある非決定性有限オートマトン: NFA with ϵ-transitions
4. DFA の簡素化: Minimizing DFA

非決定性有限オートマトン: 復習
Non-deterministic Finite Automaton: NFA

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \tag{1.1}$$

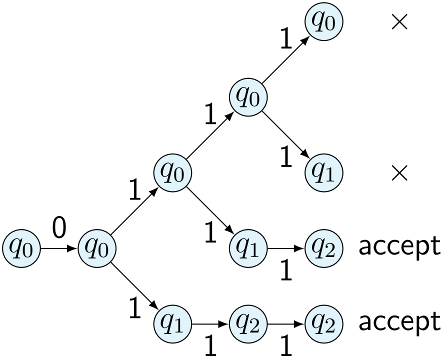
- Q: 内部状態の集合
- Σ: 入力アルファベット
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$: 状態遷移関数
  - 遷移先が複数ある: 状態集合
- $q_0 \in Q$: 初期状態
- $F \subseteq Q$: 受理状態

例 1.1:



入力 w を受理するとは、w によって引き起こされた状態遷移の遷移先のなかに、受理状態 F の要素が含まれていること。

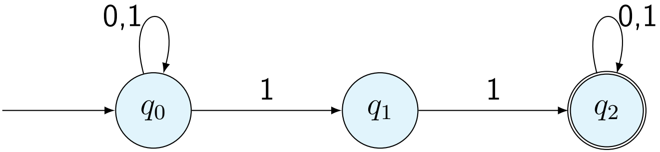
入力 0111 引き起こす状態遷移

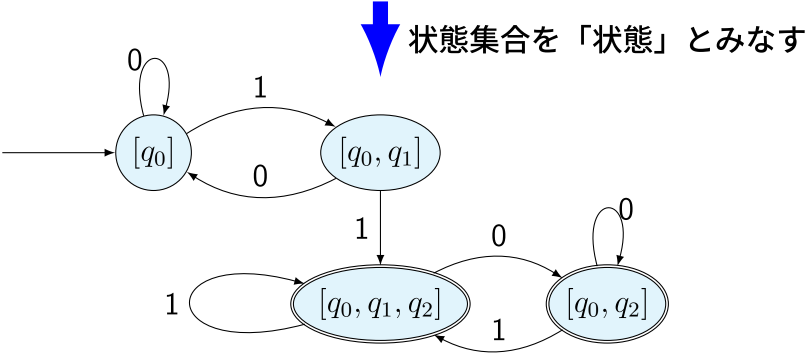


NFA から DFA へ

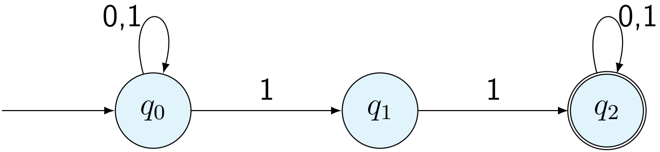
- NFA に対する DFA が構成できる
- つまり、NFA と DFA はその能力に差が無い
    - 同じ入力を受理する
- 「非決定性」の拡張
    - 入力無しでの動作 (ϵ-動作) を導入
- DFA に対応した NFA を作ることができることは自明

例 2.1: NFA から DFA への変換イメージ





$[q_0]$ と $[q_0, q_1]$ の間の遷移を構成



遷移関数の引数を状態集合へ拡張

$$
\begin{aligned}
\delta(\{q_0\}, 0) &= \{q_0\} \\
\delta(\{q_0\}, 1) &= \{q_0, q_1\} \\
\delta(\{q_0, q_1\}, 0) &= \delta(\{q_0\}, 0) \cup \delta(\{q_1\}, 1) = \{q_0\} \cup \emptyset = \{q_0\} \\
\delta(\{q_0, q_1\}, 0) &= \delta(\{q_0\}, 1) \cup \delta(\{q_1\}, 1) \\
&= \{q_0, q_1\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_1, q_2\} \\
\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, 0) &= \delta(\{q_0, q_1\}, 0) \cup \delta(\{q_2\}, 0) \\
&= \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\} \\
\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, 1) &= \delta(\{q_0, q_1\}, 1) \cup \delta(\{q_2\}, 1) \\
&= \{q_0, q_1, q_2\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_1, q_2\} \\
\delta(\{q_0, q_2\}, 0) &= \delta(\{q_0\}, 0) \cup \delta(\{q_2\}, 0) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\} \\
\delta(\{q_0, q_2\}, 1) &= \delta(\{q_0\}, 1) \cup \delta(\{q_2\}, 1) = \{q_0, q_1\} \cup \{q_2\} \\
&= \{q_0, q_1, q_2\}
\end{aligned}
$$

NFA$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ に対応した DFA M'

$$M' = \langle Q', \Sigma, \delta', [q_0], F' \rangle \tag{2.1}$$

- $Q' \subseteq 2^Q$: 集合と区別するために別の括弧 [] を使う
- Σ: 入力アルファベット
- $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$: 状態遷移関数
- $[q_0] \in Q'$: 初期状態
- $F' = \{A \in Q' \mid A \cap F \neq \emptyset\}$: 受理状態

Algorithm 1 $\mathcal{Q}'$ と δ' を構成するアルゴリズム

$D = \emptyset$, $\mathcal{Q}' = \emptyset$, $\mathcal{Q}'_{\mathsf{work}}$.push($[q_0]$) ▷ D は新しい遷移関数の集合。$\mathcal{Q}'_{\mathsf{work}}$ は待ち行列
while $\left|\mathcal{Q}'_{\mathsf{work}}\right| > 0$ **do**
  $Q' = \mathcal{Q}_{\mathsf{work}}$.pop() ▷ 起点となる状態集合 A'
  for all $a \in \Sigma$ **do**
    $Q'_{\mathsf{new}} = \emptyset$
    for all $q \in Q'$ **do**
      for all $p \in \delta(q, a)$ **do**
        Q'_{new}.append $(\{p\})$
      end for
    end for
    $D = D \cup \left\{\delta'\left(q', a\right) = q'_{\mathsf{new}}\right\}$ ▷ 新しい遷移関数を追加
    if $\left(Q'_{\mathsf{new}} \notin \mathcal{Q}'\right) \wedge \left(Q'_{\mathsf{new}} \notin \mathcal{Q}'_{\mathsf{work}}\right)$ **then** ▷ Q'_{new} は新しい状態集合
      ($\mathcal{Q}'_{\mathsf{work}}$.push $\left(Q'_{\mathsf{new}}\right)$
    end if
  end for
  $\mathcal{Q}'$.append $\left(Q'\right)$
end while

- 初期状態だけの集合 $\{q_0\}$
- 新たに発生した状態集合 S に対して、遷移先の集合を追加
- 新たな状態集合がなくなるまで繰り返す

例 2.1: Q' と δ' の構成

- $[q_0]$ を起点に

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0) &= \{q_0\} \\ \delta(q_0, 1) &= \{q_0, q_1\} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \delta'([q_0], 0) &= [q_0] \\ \delta'([q_0], 1) &= [q_0, q_1] \end{aligned}$$

- $[q_0, q_1]$ を起点に

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0) &= \{q_0\} \\ \delta(q_1, 0) &= \emptyset \\ \delta(q_0, 1) &= \{q_0, q_1\} \\ \delta(q_1, 1) &= \{q_2\} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \delta'([q_0, q_1], 0) &= [q_0] \\ \delta'([q_0, q_1], 1) &= [q_0, q_1, q_2] \end{aligned}$$

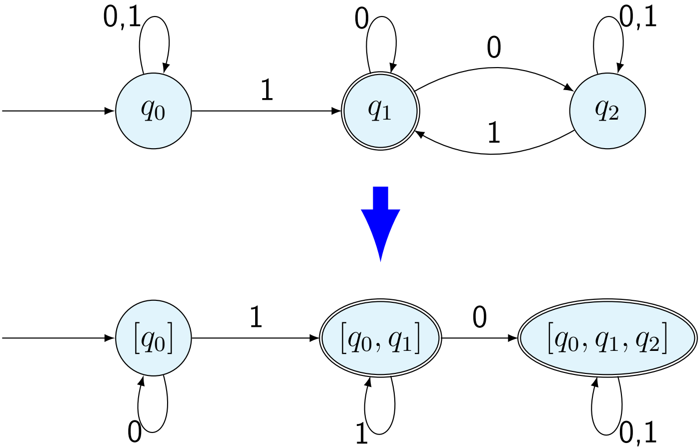
- $[q_0, q_1, q_2]$ を起点に

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0) &= \{q_0\} \\ \delta(q_1, 0) &= \emptyset \\ \delta(q_2, 0) &= \{q_2\} \\ \delta(q_0, 1) &= \{q_0, q_1\} \\ \delta(q_1, 1) &= \{q_2\} \\ \delta(q_2, 1) &= \{q_2\} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \delta'([q_0, q_1, q_2], 0) &= [q_0, q_2] \\ \delta'([q_0, q_1, q_2], 1) &= [q_0, q_1, q_2] \end{aligned}$$

- $[q_0, q_2]$ を起点に

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0) &= \{q_0\} \\ \delta(q_2, 0) &= \{q_2\} \\ \delta(q_0, 1) &= \{q_0, q_1\} \\ \delta(q_2, 1) &= \{q_2\} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \delta'([q_0, q_2], 0) &= [q_0, q_2] \\ \delta'([q_0, q_2], 1) &= [q_0, q_1, q_2] \end{aligned}$$

例 2.2:



- $[q_0]$ を起点に

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0) &= \{q_0\} \\ \delta(q_0, 1) &= \{q_0, q_1\} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \delta'([q_0], 0) &= [q_0] \\ \delta'([q_0], 1) &= [q_0, q_1] \end{aligned}$$

- $[q_0, q_1]$ を起点に

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0) &= \{q_0\} \\ \delta(q_1, 0) &= \{q_1, q_2\} \\ \delta(q_0, 1) &= \{q_0, q_1\} \\ \delta(q_1, 1) &= \emptyset \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \delta'([q_0, q_1], 0) &= [q_0, q_1, q_2] \\ \delta'([q_0, q_1], 1) &= [q_0, q_1] \end{aligned}$$

- $[q_0, q_1, q_2]$ を起点に

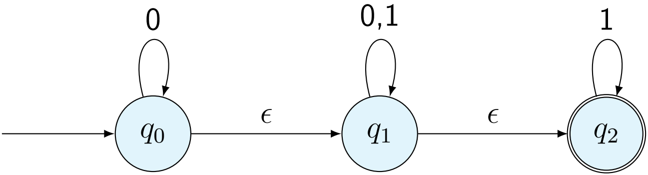
$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0) &= \{q_0\} \\
\delta(q_1, 0) &= \{q_0, q_2\} \\
\delta(q_2, 0) &= \{q_2\} \\
\delta(q_0, 1) &= \{q_0, q_1\} \\
\delta(q_1, 1) &= \emptyset \\
\delta(q_2, 1) &= \{q_2\}
\end{aligned}
\quad \to \quad
\begin{aligned}
\delta'([q_0, q_1, q_2], 0) &= [q_0, q_1, q_2] \\
\delta'([q_0, q_1, q_2], 1) &= [q_0, q_1, q_2]
\end{aligned}
$$

ϵ 動作のある非決定性有限オートマトン: NFA with ϵ-transitions

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \tag{3.1}$$

- Q: 内部状態の集合
- Σ: 入力アルファベット
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$: 状態遷移関数
  文字を読まずに遷移する (ϵ 動作) ことがある
- $q_0 \in Q$: 初期状態
- $F \subseteq Q$: 受理状態

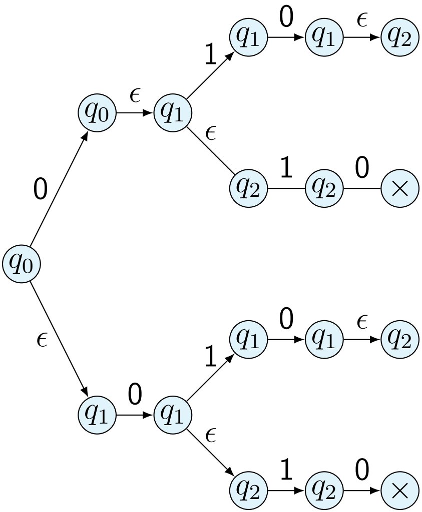
例 3.1:



$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma = \{0, 1\}, F = \{q_2\}$$

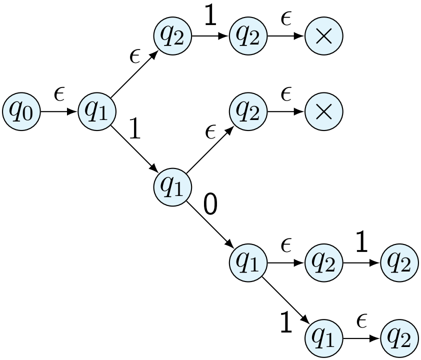
δ	0	1	ϵ
q_0	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\emptyset$

動作例: 入力 010



q_0
0
ϵ
q_0
ϵ
q_1
1
q_1
0
q_1
ϵ
q_2
ϵ
q_2
1
q_2
0
×
q_1
0
q_1
1
q_1
0
q_1
ϵ
q_2
ϵ
q_2
1
q_2
0
×

動作例: 入力 101



q_0
ϵ
q_1
ϵ
q_2
1
q_2
ϵ
×
1
q_1
ϵ
q_2
ϵ
×
0
q_1
ϵ
q_2
1
q_2
1
q_1
ϵ
q_2

ϵ-閉包: ϵ-closure

- M の状態集合 $Q' \subseteq Q$ の各要素から ϵ-動作のみで到達可能な状態の集合 $\epsilon\text{-CL}(Q')$

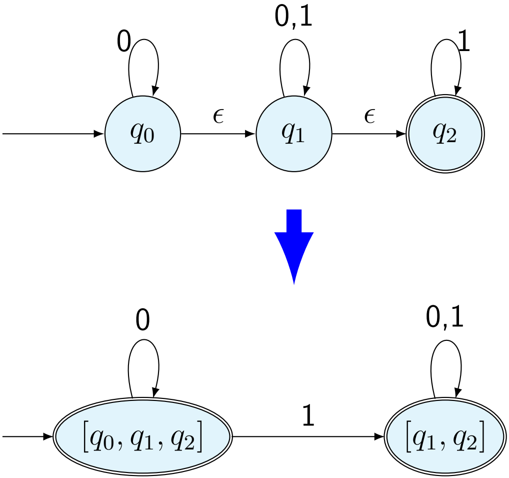
$$
\begin{aligned}
\epsilon\text{-CL}(\{q_0\}) &= \{q_0, q_1, q_2\} \\
\epsilon\text{-CL}(\{q_1\}) &= \{q_1, q_2\} \\
\epsilon\text{-CL}(\{q_2\}) &= \{q_2\}
\end{aligned}
$$

ϵ-NFA $M = \langle Q', \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ に対応したDFA M'

$$M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle \tag{3.2}$$

- $\mathcal{Q}' \subseteq 2^Q$
- Σ: 入力アルファベット
- $\delta' : \mathcal{Q}' \times \Sigma \to \mathcal{Q}'$: 状態遷移関数
  $\delta' : (Q', a) = \epsilon\text{-CL}\left(\bigcup_{q \in \epsilon\text{-CL}(Q')} \delta(q, a)\right)$, $Q' \in \mathcal{Q}'$
- $Q_0' = \epsilon\text{-CL}(\{q_0\})$: 初期状態
- $\mathcal{F}' = \{A \in \mathcal{Q}' \mid A \cap F \neq \emptyset\}$: 受理状態
- 一文字読んだ遷移後の ϵ 動作を考慮して、遷移先を求める

例 3.2:



- 始状態

$$\epsilon\text{-CL}\left(q_0\right)\left\{q_0, q_1, q_2\right\} \qquad \rightarrow \qquad \left[q_0, q_1, q_2\right] \text{ が始状態}$$

- $\left[q_0, q_1, q_2\right]$ を始点に

$$\begin{aligned}
\delta\left(q_0, 0\right) &= \epsilon\text{-CL}\left(q_0\right) = \left\{q_0, q_1, q_2\right\} \\
\delta\left(q_1, 0\right) &= \epsilon\text{-CL}\left(q_1\right) = \left\{q_1, q_2\right\} \\
\delta\left(q_2, 0\right) &= \emptyset \\
\delta\left(q_0, 1\right) &= \emptyset \\
\delta\left(q_1, 1\right) &= \epsilon\text{-CL}\left(q_1\right) = \left\{q_1, q_2\right\} \\
\delta\left(q_2, 1\right) &= \left\{q_2\right\}
\end{aligned}$$

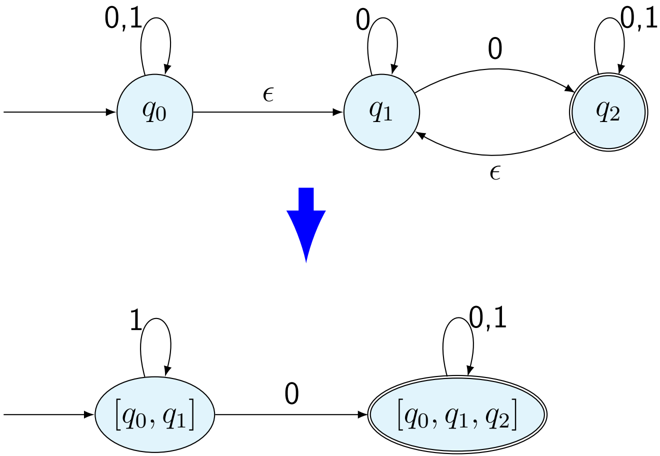
$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
\delta'\left(\left[q_0, q_1, q_2\right], 0\right) &= \left[q_0, q_1, q_2\right] \\
\delta'\left(\left[q_0, q_1, q_2\right], 1\right) &= \left[q_1, q_2\right]
\end{aligned}$$

- $[q_1, q_2]$ を始点に

$$\delta(q_1, 0) = \epsilon\text{-CL}(q_1) = \{q_1, q_2\}$$
$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$
$$\delta(q_1, 1) = \epsilon\text{-CL}(q_1) = \{q_1, q_2\}$$
$$\delta(q_2, 1) = \{q_2\}$$
$$\Downarrow$$
$$\delta'([q_1, q_2], 0) = [q_1, q_2]$$
$$\delta'([q_1, q_2], 1) = [q_1, q_2]$$

例 3.3:



- 始状態

$$\epsilon\text{-CL}(q_0) = \{q_0, q_1\} \qquad \rightarrow \qquad [q_0, q_1] \text{ が始状態}$$

- $[q_0, q_1]$ を起点に

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, 0) &= \epsilon\text{-CL}(q_0) = \{q_0, q_1\} \\
\delta(q_1, 0) &= \epsilon\text{-CL}(q_1) \cup \epsilon\text{-CL}(q_2) = \{q_1, q_2\} \\
\delta(q_0, 1) &= \epsilon\text{-CL}(q_0) = \{q_0, q_1\} \\
\delta(q_1, 1) &= \emptyset \\
&\Downarrow \\
\delta'([q_0, q_1], 0) &= [q_0, q_1, q_2] \\
\delta'([q_0, q_1], 1) &= [q_0, q_1]
\end{aligned}$$

- $[q_0, q_1, q_2]$ を起点に

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0) &= \{q_0, q_1\} \\
\delta(q_1, 0) &= \{q_1, q_2\} \\
\delta(q_2, 0) &= \epsilon\text{-}\mathsf{CL}(q_0) = \{q_1, q_2\} \\
\delta(q_0, 1) &= \{q_0, q_1\} \\
\delta(q_1, 1) &= \emptyset \\
\delta(q_2, 0) &= \epsilon\text{-}\mathsf{CL}(q_2) = \{q_1, q_2\}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
\delta'([q_0, q_1, q_2], 0) &= [q_0, q_1, q_2] \\
\delta'([q_0, q_1, q_2], 1) &= [q_0, q_1, q_2]
\end{aligned}
$$

DFA の簡素化: Minimizing DFA

- 同じ文字列を受理する DFA のうちで、状態数の最小の DFA への変換
- 状態の集合から入力による遷移先の集合に注目する

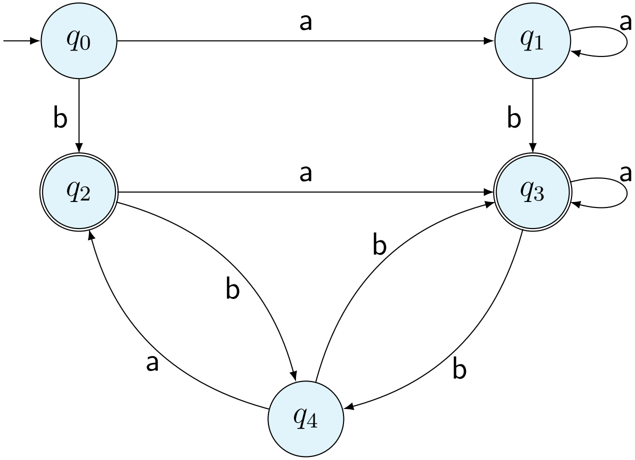
最小化アルゴリズム概要: Minimization Algorithm

- 受理状態の集合とそれ以外の状態集合に分ける
- 各状態集合について、各入力に対する遷移先が異なるならば、遷移先に応じて状態集合を分割する
- すべての状態集合が分割できなくなるまで上記を繰り返す
- 各状態集合を状態と定義しなおす

最小化アルゴリズム

$\mathcal{Q} = \{Q \setminus F, F\}$
while T **do**
  $\mathcal{Q}_{\mathrm{new}} = \mathcal{Q}$
  for all $Q' \in \mathcal{Q}$ **do**
    for all $a \in \Sigma$ **do**
      $Q'' = \left\{ q \in Q \mid q = \delta(p, a), \forall p \in Q' \right\}$ ▷ Q' からの遷移先
      if Q'' は $\mathcal{Q}$ の要素の部分集合ではない **then**
        $\mathcal{D} = \left\{ Q'' \cap \tilde{Q} \mid \tilde{Q} \in \mathcal{Q} \right\}$ ▷ Q'' を $\mathcal{Q}$ の要素で分割
        for all $D \in \mathcal{D}$ **do**
          $O = \left\{ q \mid d = \delta(q, a), \forall q \in Q', d \in D \right\}$ ▷ 遷移先に対応した遷移元
          $\mathcal{Q}_{\mathrm{new}} = (\mathcal{Q}_{\mathrm{new}} \setminus \left\{ Q'' \right\}) \cup \{O\}$
        end for
      end if
    end for
  end for
  if $\mathcal{Q} \neq \mathcal{Q}_{\mathrm{new}}$ **then**
    break
  end if
end while
状態集合を新たな「集合」に
元の初期状態を含む状態集合を新たな初期状態に、元の受理状態のみを含む状態集合を新たな受理集合に

例 4.1:



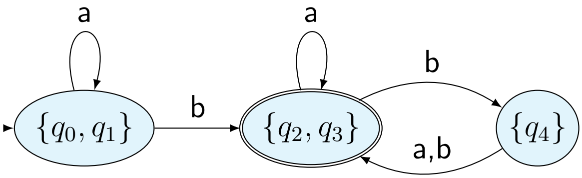
- $\{q_2, q_3\}$

$$\{q_2, q_3\} \xrightarrow{\mathsf{a}} \{q_3\} \subset \{q_2, q_3\}$$
$$\{q_2, q_3\} \xrightarrow{\mathsf{b}} \{q_4\} \subset \{q_0, q_1, q_4\}$$

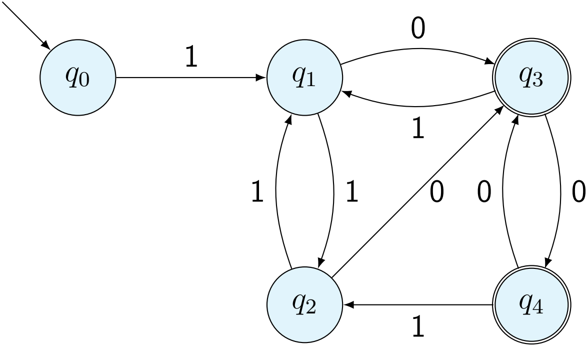
  - 分割の必要なし
- $\{q_0, q_1, q_4\}$

$$\{q_0, q_1\} \xrightarrow{\mathsf{a}} \{q_1\} \subset \{q_0, q_1\}$$
$$\{q_4\} \xrightarrow{\mathsf{a}} \{q_2\} \subset \{q_2, q_3\}$$
$$\{q_0, q_1\} \xrightarrow{\mathsf{b}} \{q_2, q_3\}$$
$$\{q_4\} \xrightarrow{\mathsf{b}} \{q_3\} \subset \{q_2, q_3\}$$

  - $\{q_0, q_1\}$ と $\{q_4\}$ の二つに分割
- 再度全ての状態集合に確認し、新たな分割は無い


a
a
b
b
a,b
$\{q_0, q_1\}$
$\{q_2, q_3\}$
$\{q_4\}$

例 4.2:



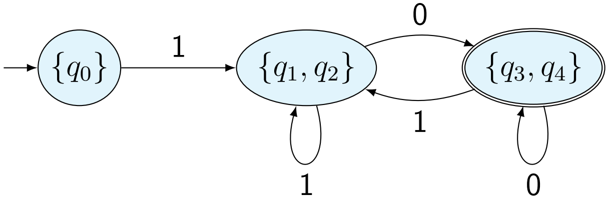
- $\{q_0, q_1, q_2\}$

$$\{q_0\} \xrightarrow{1} \{q_1\} \subset \{q_1, q_2\}$$
$$\{q_1, q_2\} \xrightarrow{0} \{q_3\} \subset \{q_3, q_4\}$$
$$\{q_1, q_2\} \xrightarrow{1} \{q_1, q_2\}$$

  - $\{q_1\}$ と $\{q_1, q_2\}$ に分割
- $\{q_3, q_4\}$

$$\{q_3, q_4\} \xrightarrow{0} \{q_3, q_4\}$$
$$\{q_3, q_4\} \xrightarrow{1} \{q_1, q_2\}$$

  - 分割の必要なし



$\{q_0\}$
1
$\{q_1, q_2\}$
0
$\{q_3, q_4\}$
1
1
0