最短経路問題

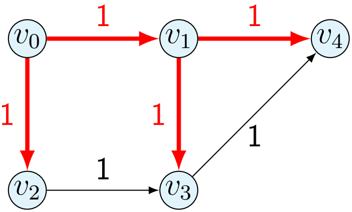
離散数学・オートマトン
2024 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

最短経路問題: Shortest Paths

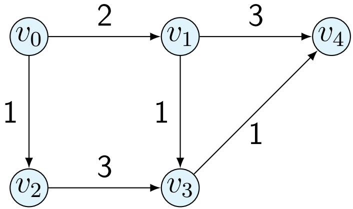
- 有向ネットワーク: directed network
  - 各辺に距離・コスト (正の実数): positive distance or cost on each edge
- 始点から終点までの最短有向道を見つける: find the shortest directed path from the origin to the destination
  - 辺の向きがそろった道:
- 距離・コストを最小化する組み合わせ最適化問題: combinatorial optimization problem for minimizing the sum of distances or costs

すべての辺の距離が同じ場合 幅優先探索で十分

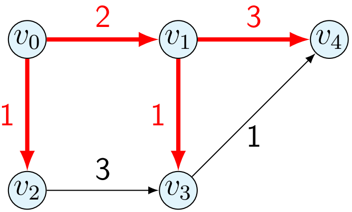
- Breadth First Search works well if all edges have the same distance



辺の長さがばらばらな場合: If lengths of edges are different



幅優先探索では誤る: Breadth First Search gives wrong answer



- v_4 への経路が $v_0 \to v_1 \to v_4$ となり、距離が 5
- しかし、経路 $v_0 \to v_1 \to v_3 \to v_4$ のほうが距離 4
- 頂点の移動数が多くても、距離の短い道がある

Dijkstra 法: 変数: variables

$p(v)$: **始点から頂点 v への距離**: distance from the origin to vertex v

$q(v)$: **始点から頂点 v への経路の、v の一つ前の頂点**: the previous vertex of v on the path from the origin

$l(e)$: **辺 e の長さ**: length of edge e

U : **始点からの距離が仮に分かった頂点の集合**: set of vertices whose distance from the origin is calculated

W : **始点からの距離が確定した頂点の集合**: set of vertices whose distance from the origin is determined

Dijkstra 法: 初期化: Initialization

$$U = \{v_0\} \tag{2.1}$$

$$W = \emptyset \tag{2.2}$$

$$p(v_0) = 0 \tag{2.3}$$

$$p(u) = +\infty \quad (\forall u \in V \setminus \{v_0\}) \tag{2.4}$$

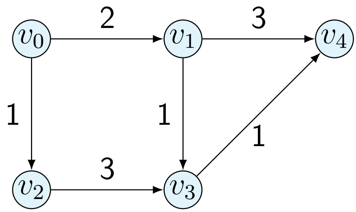
$$q(v) = \mathsf{NULL} \quad (\forall v \in V) \tag{2.5}$$

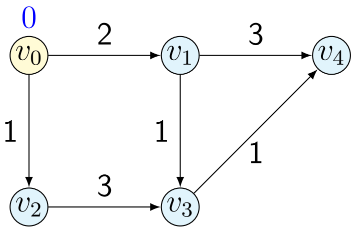
Dijkstra 法: アルゴリズム: Algorithm

Algorithm 1 Dijkstra 法: Dijkstra's Algorithm

```
while U ≠ ∅ do
    w = U の要素のうち p(w) が最小の要素            ▷ Find the minimum element in U
    for all e ∈ δ⁺w do
        x = ∂⁻e                                      ▷ w の隣接頂点: adjacent vertex of w
        if p(x) > p(w) + l(e) then                   ▷ e を使ったほうが近距離: If e gives shorter path
            q(x) ← w
            p(x) ← p(w) + l(e)
        end if
        if x ∉ U then
            U に x を追加                            ▷ Add x to U
        end if
    end for
    w を W へ追加 Add w to W
end while
```

例 2.1:



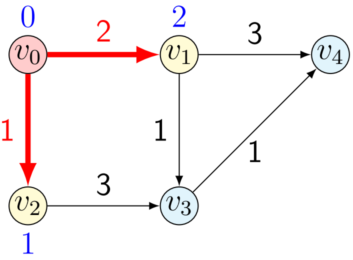


黄色い頂点は U に属する

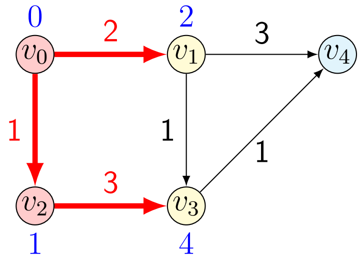
The yellow vertices belong to U

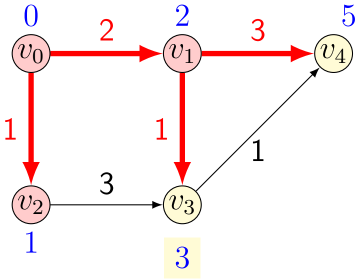
頂点近くの青い数字は $p(v)$

The blue numbers near the vertices express $p(v)$

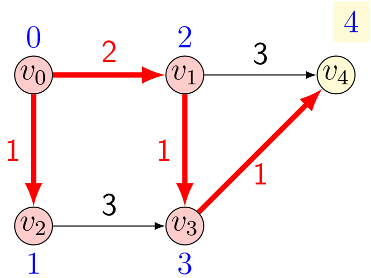


赤い頂点は W に属する
The red vertices belong to W


0
2
2
3
v_0
v_1
v_4
1
1
1
3
v_2
v_3
1
4



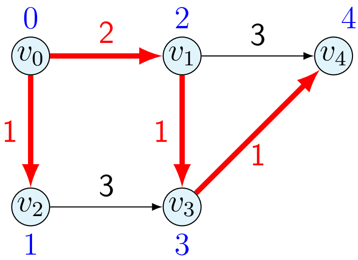
v_3 の距離が変更になった
The distance of v_3 has been updated.



v_4 の距離が変更になった

The distance of v_4 has been updated.

例 2.1: 結果: Result

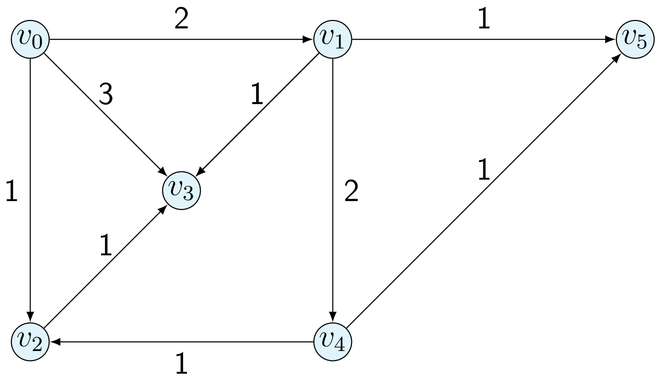


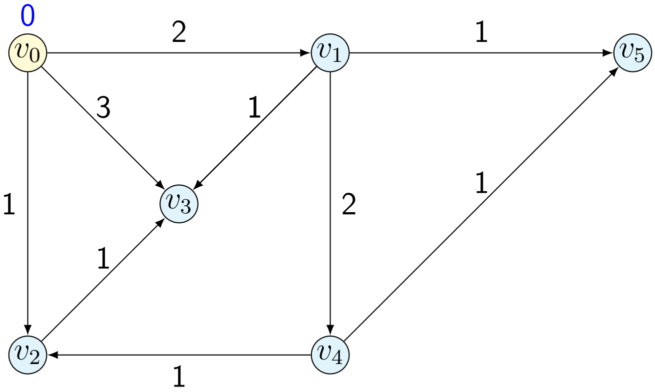
例 2.1: まとめ: Summary

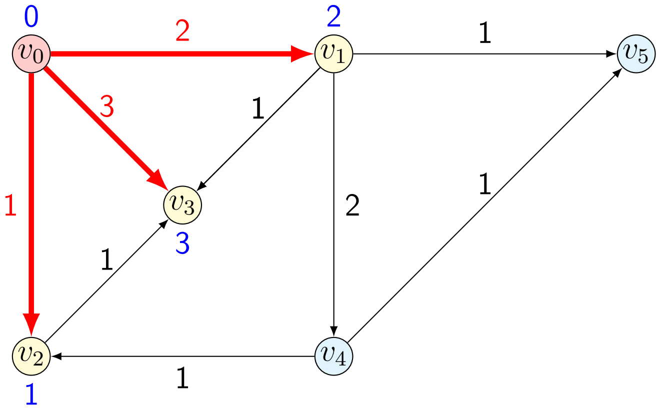
W	U	p	q
$\emptyset$	$\{v_0\}$	$p(v_0) = 0$	
$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2\}$	$p(v_1) = 2$ $p(v_2) = 1$	$q(v_1) = v_0$ $q(v_2) = v_0$
$\{v_0, v_2\}$	$\{v_1, v_3\}$	$p(v_3) = 4$	$q(v_3) = v_2$
$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4\}$	$p(v_3) = 3$ $p(v_4) = 5$	$q(v_3) = v_1$ $q(v_4) = v_1$
$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4\}$	$p(v_4) = 4$	$q(v_4) = v_3$
$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\emptyset$		

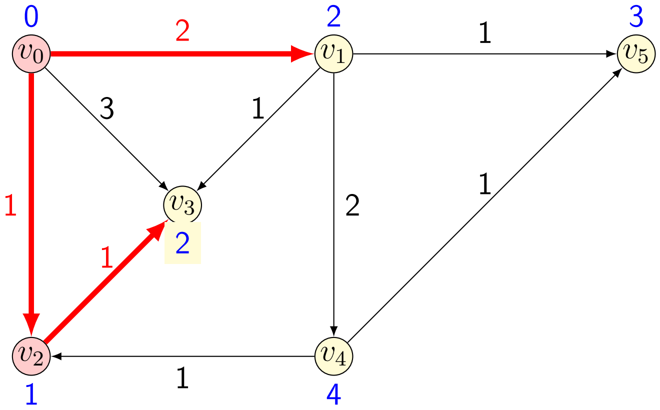
赤文字は、変更箇所: The red letters show the updated values.

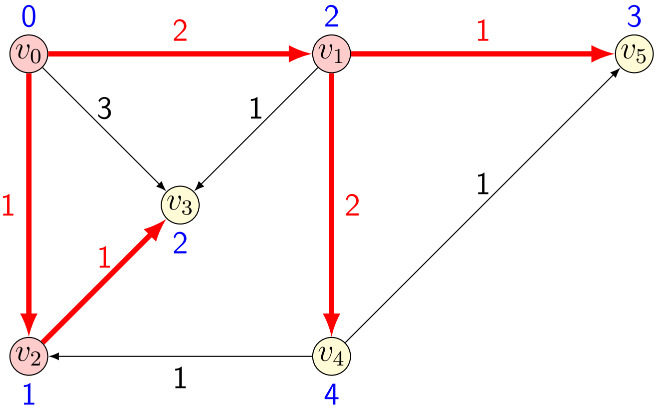
例 2.2:



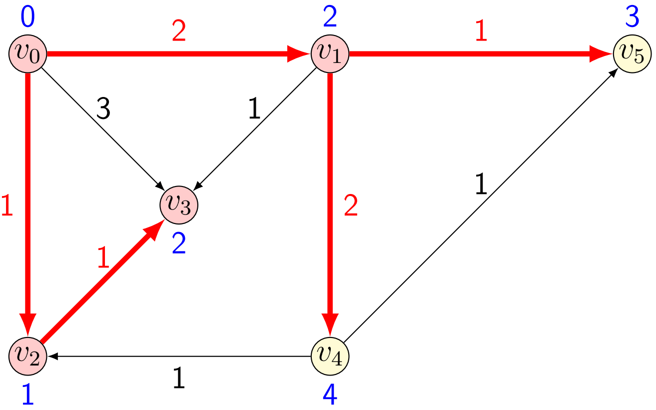

0
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
2
1
3
1
1
2
1
1
1
1

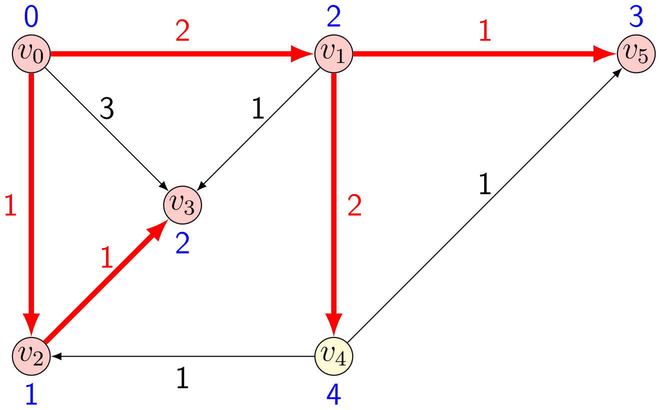

0
2
3
2
1
v_0
v_1
v_5
1
3
1
v_3
2
1
1
3
1
v_2
v_4
1
1

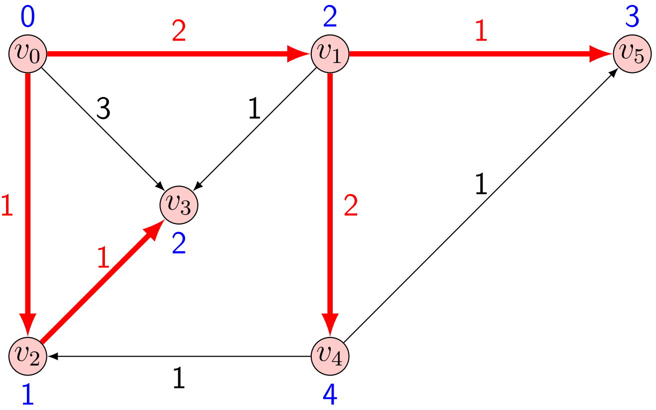

0
2
2
1
3
v_0
v_1
v_5
3
1
v_3
1
2
2
1
1
v_2
v_4
1
1
4

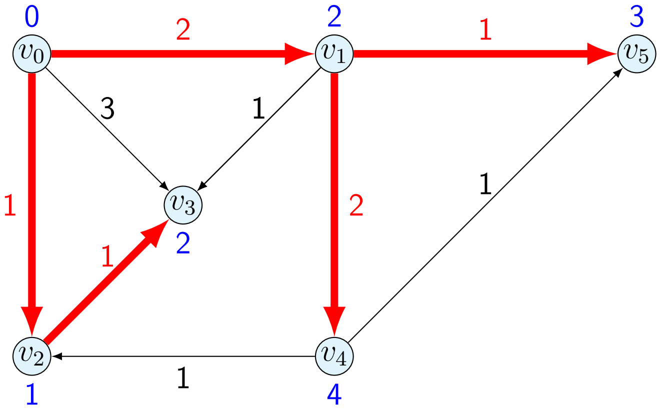


0
2
3
v_0
v_1
v_5
2
1
3
1
1
2
1
v_3
2
1
v_2
v_4
1
1
4


0
2
3
2
1
v_0
v_1
v_5
3
1
1
2
v_3
2
1
1
v_2
v_4
1
1
4

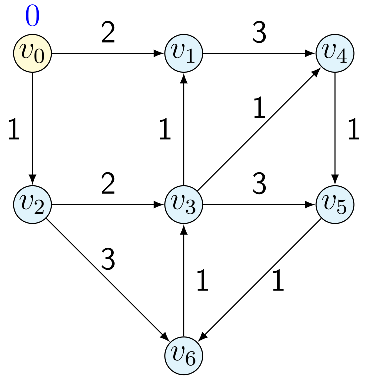

0
2
3
v_0
v_1
v_5
2
1
3
1
1
1
2
v_3
2
1
v_2
v_4
1
1
4

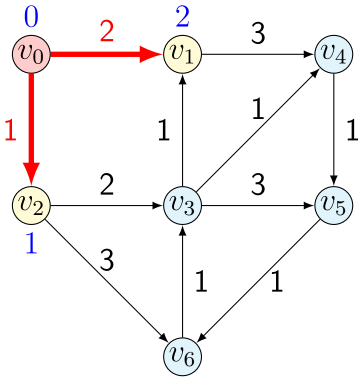

0
2
3
v_0
v_1
v_5
2
1
3
1
1
1
2
v_3
2
1
v_2
v_4
1
1
4

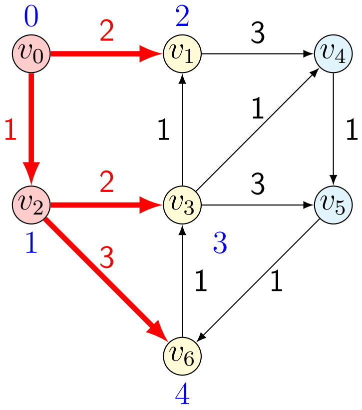

0
2
3
v_0
2
v_1
1
v_5
3
1
1
v_3
2
2
1
1
v_2
1
v_4
1
4

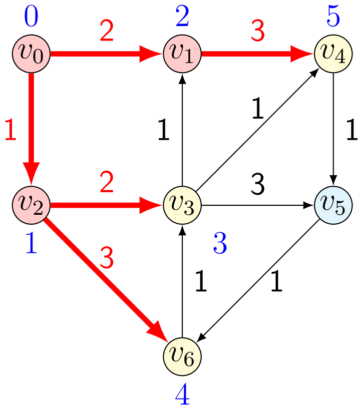
W	U	p	q
$\emptyset$	$\{v_0\}$	$p(v_0) = 0$	
$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$	$p(v_1) = 2$ $p(v_2) = 1$ $p(v_3) = 3$	$q(v_1) = v_0$ $q(v_2) = v_0$ $q(v_3) = v_0$
$\{v_0, v_2\}$	$\{v_1, v_3\}$	$p(v_3) = 2$	$q(v_3) = v_2$
$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4, v_5\}$	$p(v_4) = 3$ $p(v_5) = 4$	$q(v_4) = v_1$ $q(v_5) = v_1$
$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4, v_5\}$		
$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{v_5\}$		
$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$	$\emptyset$		

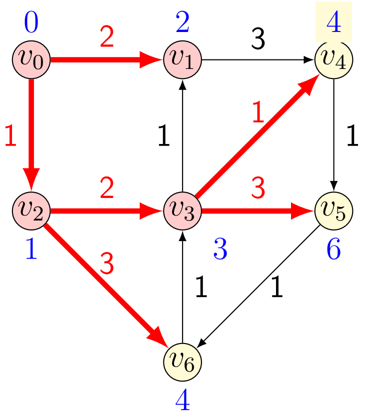
例 2.3:

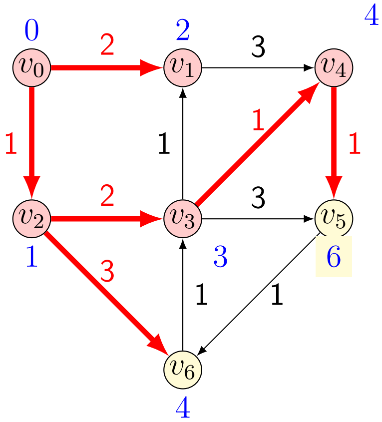


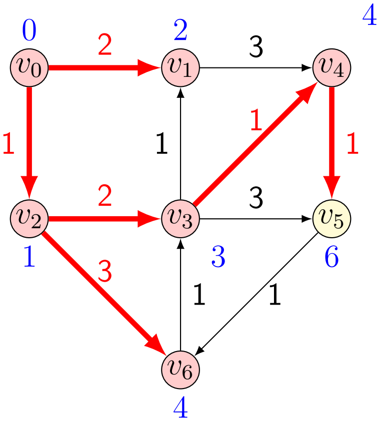

0
2
2
3
v_0
v_1
v_4
1
1
1
1
2
3
v_2
v_3
v_5
1
3
1
1
v_6

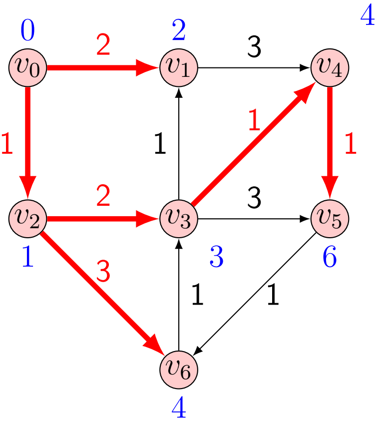

0
2
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
1
1
1
2
3
v_2
v_3
v_5
1
3
3
1
1
v_6
4


0
2
5
2
3
v_0
v_1
v_4
1
1
1
1
2
3
v_2
v_3
v_5
1
3
3
1
1
v_6
4

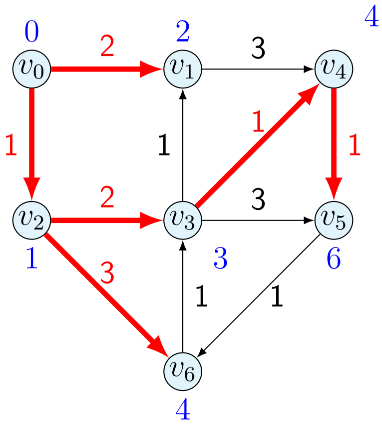

0
2
4
3
2
v_0
v_1
v_4
1
1
1
1
v_2
v_3
v_5
2
3
1
3
6
3
1
1
v_6
4


0
2
4
2
3
v_0
v_1
v_4
1
1
1
1
2
3
v_2
v_3
v_5
1
3
6
3
1
1
v_6
4


0
2
4
2
3
v_0
v_1
v_4
1
1
1
1
2
3
v_2
v_3
v_5
1
3
6
3
1
1
v_6
4


0
2
4
2
3
v_0
v_1
v_4
1
1
1
1
2
3
v_2
v_3
v_5
1
3
6
3
1
1
v_6
4

例 2.3：結果



証明概要: Outline of Proof

補題 1:lenma 頂点は、始点からの距離が短い順に W に入る。また、W に入った頂点の距離を更新することはない
The vertices are added to W in the order of the distance from the origin. The distance of the vertices in W is not updated.

補題 2:lenma U 及び W に属する頂点には、始点からの経路があり、その時点で最短である
The vertices in U and W have the shortest path from the origin at every update time.

補題 1

- Dijkstra 法の実行に伴って、頂点が v_0、v_1、v_2、... という順に集合 W に追加されるとする。頂点名は、元のネットワークの頂点名でないことに注意
  Assume that the vertices are added to W in the order of v_0, v_1, v_2, ... Note that the names of the vertices are not the original vertex names.

$$0 \le p(v_0) \le p(v_1) \le \cdots \le p(v_i) \le \cdots \tag{3.1}$$

- つまり W には、距離の小さい頂点から順に追加されていく。従って、W に入った頂点 v に対する $p(v)$ が後から更新されることはない。
  The vertices are added to W in the order of the distance from the origin. Therefore, $p(v)$ is not updated after v is added to W

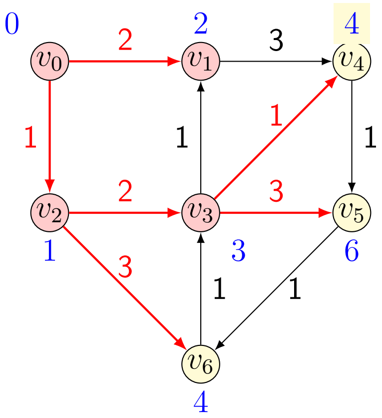
補題1が正しいこと: Proof of Lemma 1

- Dijkstra 法の実行中に、以下が常に成り立つことを示す: Show that the following is always true during the execution of Dijkstra's algorithm
  - W の要素である頂点への距離は、W の要素でない任意の頂点への距離より大きいことはない: The distance to the vertices in W is not greater than the distance to any vertices not in W

$$\max\{p(u) \mid u \in W\} \leq \min\{p(u) \mid u \in V \setminus W\} \tag{3.2}$$

  - $v \in W$ に対して、$p(v)$ を更新することはない: $p(v)$ for $v \in W$ is not updated

$$\begin{aligned} &\forall v \in U \subseteq V \setminus W, \quad \forall u \in W \\ &\Rightarrow p(v) \geq p(u) \end{aligned} \tag{3.3}$$


0
2
4
2
3
v_0
v_1
v_4
1
1
1
1
2
3
v_2
v_3
v_5
1
3
6
3
1
1
v_6
4

- 次のステップとして、v_3 を起点に隣接頂点の距離を計算する。
  Next, calculate the distance of the adjacent vertices from v_3.
- このとき、v_1 の距離を更新することはない。
  The distance of v_1 is not updated.
- 更新したのは、v_4 の距離である
  The distance of v_4 is updated.

補題 2

- U 及び W に属する頂点には、始点からの最短経路がある: The vertices in U and W have the shortest path from the origin

補題2が正しいこと: Proof of Lemma 2

- **構成方法から、U 及び W に属する頂点には、その時点で、始点からの最短経路がある**
  From the construction, the vertices in U and W have the shortest path from the origin at every step.
- **$u \in U$ は、より短い経路が見つかる度に距離が更新 $\Rightarrow$ やがて u は W に入り、その距離が確定**
  The distance of a vertex $u \in U$ is updated whenever a new shorter path is found. Eventually, u is added to W and its distance is determined