数学的帰納法と再帰的定義

離散数学・オートマトン
2024 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

1. 自然数の定義: Definition of natural numbers
2. 数学的帰納法: Mathematical induction
3. 累積帰納法: Course-of-values induction
4. 再帰的定義: Recursive definitions

自然数の定義: Peano の公理

- 集合 N が以下の 3 つを満たすとき、N の要素を自然数という
  - $1 \in N$
  - 単射 $S : N \to N$ が存在。ただし $1 \notin S(N)$ (1 を S の値域に含まない)
$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \tag{1.1}$$
  - $M \subseteq N$ が、以下を満たすとき $M = N$
$$1 \in M \tag{1.2}$$
$$S(M) \subset M \tag{1.3}$$

Peanoの公理の意味

- $S(n)$ は $n+1$ に相当:「後者」
- Peano の 2 番目の公理より

$$
\begin{aligned}
2 &= S(1) \\
3 &= S(2) \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

- Peano の 3 番目の公理
  - 1 を含む N の部分集合が N そのもの
  - つまり、1 から導出されたもの以外を含まない

数学的帰納法: Mathematical induction

- Peano の 3 番目の公理を「数学的帰納法の公理」と呼ぶ
- $P(x)$, $x \in N$ に対する数学的帰納法
    - $P(1) = \mathrm{T}$: 帰納法の基礎
    - 任意に選んだ k に対して $P(k) = \mathrm{T}$ を仮定
    - 帰納ステップにより $P(k+1) = \mathrm{T}$ を示す
- 実際の証明では $x = 1$ から始める必要はなく、適当な初期値を選ぶ。

例 2.1:

- 命題

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2,\ \forall n\in N\cup\{0\} \tag{2.1}$$

- $n=0$

$$\text{LHS}=\sum_{k=0}^{0}(2k+1)=2\times 0+1=1 \tag{2.2}$$

$$\text{RHS}=(0+1)^2=1 \tag{2.3}$$

- ある n で命題 (2.1) が正しいと仮定し、$n+1$ の場合も真であることを示す

続き

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) &= \sum_{k=0}^{n}(2k+1) + (2(n+1)+1) \\
&= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \\
&= ((n+1)+1)^2
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

- $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$ に対して、命題を適用している

例 2.2:

- **命題**:

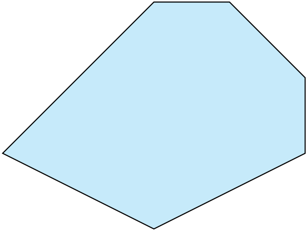
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1) \tag{2.5}$$

- $n = 1$:

続き

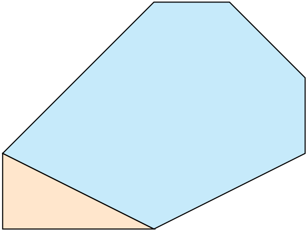
例 2.3:

- 命題: 凸な n 角形の内角の和は $A_n = (n-2)\pi$ である。
- $n = 3$ の場合 $A_3 = \pi$ は自明
- ある n で正しいとする: $A_n = (n-2)\pi$



続き

- 一点追加する



$$A_{n+1} = A_n + \pi = ((n+1) - 2)\,\pi \tag{2.6}$$

例 2.4:

- 命題: 集合 A の大きさ $|A|$ に対して、$|A| < \infty$ ならば $\left|2^A\right| = 2^{|A|}$
- $|A| = 0$、つまり $A = \emptyset$ の場合

$$\text{LHS} = \left|2^{\emptyset}\right| = |\{\emptyset\}| = 1 \tag{2.7}$$

$$\text{RHS} = 2^{|A|} = 2^0 = 1 \tag{2.8}$$

- $|A| = k$ の場合に命題が正しいと仮定し、新に一つ要素 $(b \notin A)$ を追加した集合を $B = A \cup \{b\}$ とする

つづき

- 2^B の要素は、2^A の要素 (2^k 個) と、2^A の各要素に b を加えたもの (2^k 個) の全体

$$2^B = 2^A \cup \left\{ s \cup \{b\} \mid s \in 2^A \right\} \tag{2.9}$$

- つまり

$$\left| 2^B \right| = 2^k + 2^k = 2^{k+1} \tag{2.10}$$

$$2^{|B|} = 2^{|A|+1} = 2^{k+1} \tag{2.11}$$

例 2.5:

- $A = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ の場合

$$2^A = \{\emptyset, \{\mathsf{a}\}, \{\mathsf{b}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}\} \tag{2.12}$$

$$\left|2^A\right| = 4 \tag{2.13}$$

$$2^{|A|} = 2^2 = 4 \tag{2.14}$$

- $B = A \cup \{\mathsf{c}\}$ とする

$$\begin{aligned} 2^B = &\{\emptyset, \{\mathsf{a}\}, \{\mathsf{b}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}\} \\ &\cup \{\{\mathsf{c}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{c}\}, \{\mathsf{b}, \mathsf{c}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}\} \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\left|2^B\right| = 8 \tag{2.16}$$

$$2^{|B|} = 2^3 = 8 \tag{2.17}$$

累積帰納法: Course-of-values induction

- 命題 $P(n)$, $(n \in N,\ n \geq n_0)$
  - $P(n_0)$ が成りたち
  - ある k に対して $P(m)$, $n_0 \leq m \leq k$ が成り立つならば $P(k+1)$ も成り立つとき
  - 任意の $n \geq n_0$ に対して $P(n)$ が成り立つ

累積帰納法が正しいこと

- $k = n_0$ の場合、自明
- 累積帰納法は正しくないと仮定
  - 累積帰納法が正しくない最小の値を $n_f > n_0$ とする
  - しかし、$n_0 \leq m < n_f$ が正しいことから $P(n_f)$ が導かれれば、累積機能法が証明される。

例 3.1: Fibonacci 数列

- Fibonacci 数列を漸化式で定義: f_{n+2} は、直前の f_{n+1} だけでなく f_n も使って定義されていることに注意

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \tag{3.1}$$

- f_n は次式となる

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{3.2}$$

- $n = 0$

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0 \tag{3.3}$$

- $n = 1$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}\right) = 1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

ある n と $n-1$ で、式 (3.2) が正しいと仮定して、一般式を導出

$$
\begin{aligned}
f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\
&+ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) \\
&- \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

例 3.2:

$$a_0 = 1 \tag{3.6}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{n-k} \tag{3.7}$$

で定義する数列 $\{a_n\}$ の $n \geq 1$ の一般項は

$$a_n = 2^{2n-1} \tag{3.8}$$

である。

証明

- $n = 1$

$$a_1 = \sum_{k=1}^{1} 2^k a_{n-k} = 2a_0 = 2 \tag{3.9}$$

$$a_1 = 2^{2*1-1} = 2 \tag{3.10}$$

続き

- $\forall k(1 \leq k \leq n)$ で $a_k = 2^{2k-1}$ であるとする。

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^k a_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{n+1-k} + 2^{n+1} a_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^{k+2(n+1-k)-1} + 2^{n+1} \\
&= 2^{2n+1} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} + 2^{n+1} = 2^{2n+1}\left(1 - 2^{-n}\right) + 2^{n+1} \\
&= 2^{2n+1} \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

再帰的定義: Recursive definitions

- 可算集合や、可算集合上の関数、関係などを、初期値と再帰手続きで定義するもの
- 集合 S の再帰的定義
    - 初期ステップ: S の要素をいくつか列挙
    - 再帰ステップ: S の要素から新しい要素を導出
    - 限定句：上記二つのみで構成することを言明

例 4.1: Kleene 閉包

- アルファベット (記号の集合)Σ から、その Kleene 閉包 Σ^* を再帰的に定義
- $\forall a \in \Sigma$ に対して $a \in \Sigma^*$。また $\epsilon \in \Sigma^*$
- $\forall a \in \Sigma$ と $\forall x \in \Sigma^*$ に対して、$ax \in \Sigma^*$
- 例 $\Sigma = \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}\Sigma^* = \{&\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11,\\ &000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, \cdots\}\end{aligned} \tag{4.1}$$

例 4.2: 階乗

- $0! = 1$
- $n! = n \times (n-1)!,$ for $n \in N$

例 4.3: 二項係数

- $n \in N$、$1 \leq m \leq n$ に対して

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \tag{4.2}$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} &= \frac{(n-1)!}{m!\,(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\left(\frac{n-m}{n} + \frac{m}{n}\right) = \binom{n}{m} \qquad (4.4)\end{aligned}$$