# 集合と写像

離散数学・オートマトン
2024 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

1. この講義の目的: Purpose of this lecture
2. 集合の基本: Fundamentals of Sets
3. 集合の関係: Relations between Sets
4. 集合の演算: Operations on Sets
5. 集合の族: Families
6. 写像 (Mappings) または関数 (Functions)

# この講義の目的: Purpose of this lecture

- コンピュータ内の処理はデジタル (digital)
  - 0 と 1 で全てを表現
  - Boole 変数 (True/False)
  - 論理演算
- 離散数学: Discrete Mathematics
  - 集合、論理、グラフ理論等
  - 計算機科学には必須
- オートマトンと形式言語
  - 抽象的計算機
  - 計算の理論
  - 言語理論: 正規表現、文脈自由文法

# 全体予定

1. 集合と写像
2. 命題、述語、ブール代数
3. 数学的帰納法と再帰的定義
4. 関係と順序
5. グラフ
6. グラフの探索
7. 最小木
8. 最短経路問題
9. カットとフロー
10. 有限オートマトン
11. 非決定性有限オートマトンと決定性有限オートマトン
12. 有限オートマトンと正規表現
13. プッシュダウンオートマトン
14. 文脈自由文法
15. チューリングマシン

# 集合: Sets

- ある特性を持ったモノの集まり
  - 要素: elements
  - 集合に含まれるか否かは明確でなければならない
- 要素 $x$ が集合 $A$ に属する ($x$ belongs to $A$)

$$x \in A \tag{2.1}$$

- 要素 $x$ が集合 $A$ に属さない ($x$ does not belong to $A$)

$$x \notin A \tag{2.2}$$

# 集合の表現: Representation of Sets

- 外延的記述: extensive descriptions
  - 要素の列挙 (enumerating elements)
  - 例: $A = \{2, 3, 5, 7\}$
  - 例: $L = \{00, 01, 10, 11\}$
- 内包的記述: inclusive descriptions
  - 条件の記述: {要素 | 要素の条件}
  - 例: $A = \{n \mid n$は 10 以下の素数$\}$
  - 例: $L = \{s \mid s$は、0 と 1 からなる長さ 2 の文字列$\}$

# 有限集合、無限集合、可算集合

- 有限集合: finite sets
  - 要素が有限個
- 無限集合: infinite sets
  - 要素が無限個
- 可算集合: countable/enumerable sets
  - 要素を列挙 (enumerate) できる
  - 自然数と対応付けることができる
  - 無限集合でもよい
- 非加算集合: uncountable/unenumerable sets
  - 要素を列挙できない

# 例 2.1: 基本的な数の集合

- 自然数 (natural numbers) 全体: $N$
  - $0 \notin N$
- 整数 (integers) 全体: $Z$
- 素数 (prime numbers) 全体: $P$
- 有理数 (rational numbers) 全体: $Q$
- 実数 (real numbers) 全体: $R$
- 複素数 (complex numbers) 全体: $C$

# 例 2.2: 簡単な集合

- 10 以下の自然数

$$\begin{aligned} A &= \{n \mid n \in N, n \leq 10\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

- 10 以下の素数

$$B = \{2, 3, 5, 7\} \tag{2.4}$$

- 3 で割り切れない自然数

$$C = \{n \mid n \in N, n \bmod 3 \neq 0\} \tag{2.5}$$

# 閉区間、開区間、半開区間

- 閉区間: closed sections

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \tag{2.6}$$

- 開区間: open sections

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \tag{2.7}$$

- 半開区間: semi-closed sections

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\} \tag{2.8}$$

- 無限区間: infinite sections

$$(-\infty, \infty), [a, \infty), (-\infty, b] \tag{2.9}$$

# 集合に関わる記号など

- 集合 $A$ の全て (任意) の要素: $\forall x \in A$
- 集合 $A$ のある (特定の) 要素: $\exists x \in A$
- 条件 $p$ かつ条件 $q$: $p \wedge q$
- 条件 $p$ または条件 $q$: $p \vee q$
- 条件 $p$ の否定: $\neg p$

# 部分集合: Subsets

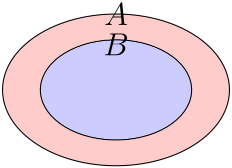
- 集合 $A$ の全ての要素が集合 $B$ に含まれる
  - $A$ は $B$ の部分集合: $A \subseteq B$
  - $x$ が $A$ の要素ならば、$x$ は $B$ の要素である:
    $A$ の要素は、全て $B$ の要素である

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \tag{3.1}$$

# 真部分集合: True Subsets

- $B$ は $A$ の部分集合であり、$A$ の要素で $B$ に含まれないものがある
  - $B$ は $A$ の真部分集合 (true subsets): $B \subset A$
  - $B$ の任意の要素 $x$ が $A$ の要素であり、かつ、$B$ の要素でない $A$ の要素 $y$ が存在する

$$(\forall x \in B \Rightarrow x \in A) \land (\exists y \in A \Rightarrow y \notin B) \tag{3.2}$$



# 例 3.1: 簡単な集合の包含関係

- $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$
- 正の整数のうち、2 の倍数 $A$、3 の倍数 $B$、6 の倍数 $C$

$$A = \{n \mid n = 2m, m \in N\} \tag{3.3}$$

$$B = \{n \mid n = 3m, m \in N\} \tag{3.4}$$

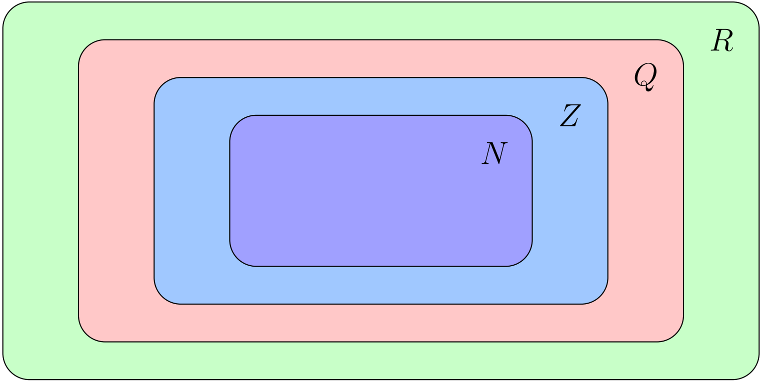
$$C = \{n \mid n = 6m, m \in N\} \tag{3.5}$$

$$(C \subset A) \wedge (C \subset B) \tag{3.6}$$

$$C = A \cap B \tag{3.7}$$

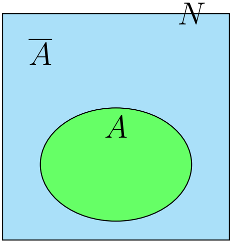
# Venn 図: Venn Diagrams

## 集合の関係を図示する




John Venn (1834-1923): English mathematician and philosopher

# 空集合と補集合: Empty Sets and Complements



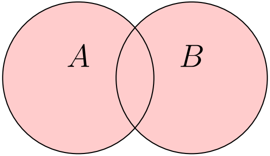

- 空集合 (empty sets): $\emptyset$
  - 要素を持たない集合
- 補集合 (complements)
  - 全体集合からある集合を除いた部分
  - 例: 全体集合 $N$、集合 $A = \{n \mid n = 2m, m \in N\}$

$$\overline{A} \equiv \{n \mid n \in N \land n \notin A\} \tag{3.8}$$

# 集合の演算: Operations on Sets

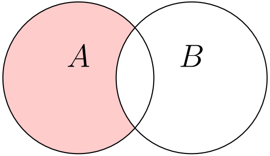
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

和
union



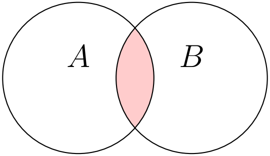

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

差
relative difference



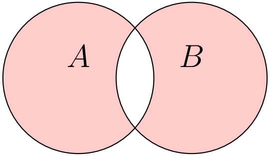

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

共通部分
intersection




$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

排他的和
exclusive union



# 例 4.1: 集合の演算

$$A = \{n \mid n = 2m, m \in N, n \leq 10\} \tag{4.1}$$

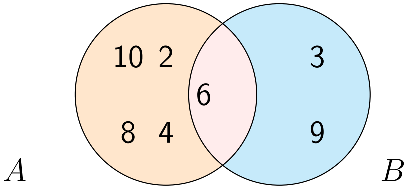
$$B = \{n \mid n = 3m, m \in N, n \leq 10\} \tag{4.2}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\} \tag{4.3}$$

$$A \cap B = \{6\} \tag{4.4}$$

$$A \setminus B = \{2, 4, 8, 10\} \tag{4.5}$$

$$A \oplus B = \{2, 3, 4, 8, 9, 10\} \tag{4.6}$$



# 集合演算の基本的性質

- 交換律: Commutative

$$X \cup Y = Y \cup X \tag{4.7}$$
$$X \cap Y = Y \cap X \tag{4.8}$$

- 結合律: Associative

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z \tag{4.9}$$
$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z \tag{4.10}$$

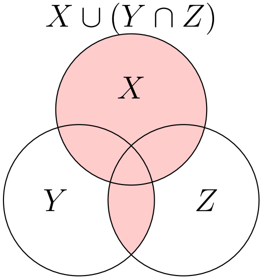
# 集合演算の基本的性質: 2

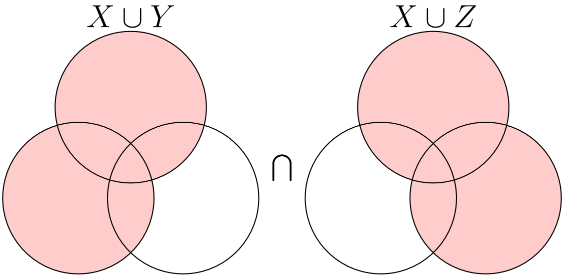
- **分配律**: Distributive

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \tag{4.11}$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \tag{4.12}$$

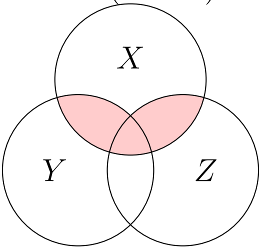
# $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$



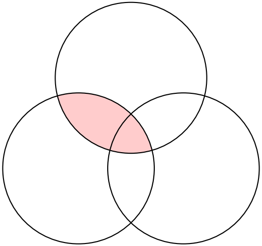



# $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

$X \cap (Y \cup Z)$

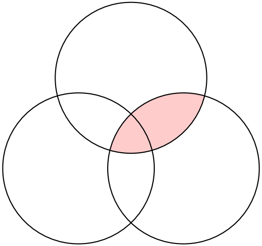



$X \cap Y$



$\cup$

$X \cap Z$



# 集合演算の基本的性質: 3

- 巾等律: Idempotent

$$X \cup X = X \tag{4.13}$$
$$X \cap X = X \tag{4.14}$$

- 吸収律: Absorption

$$X \cup (X \cap Y) = X \tag{4.15}$$
$$X \cap (X \cup Y) = X \tag{4.16}$$

# de Morgan の法則

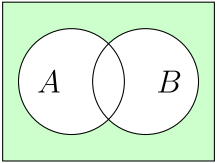
- 全体集合 $U$ とその部分集合 $A$ と $B$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{4.17}$$

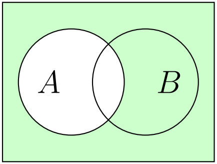
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{4.18}$$

# $\overline{A \cup B}$

$\overline{A \cup B}$

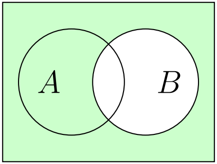



$\overline{A}$



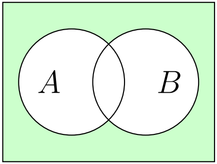

$\cap$

$\overline{B}$



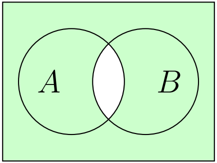

$=$

$\overline{A} \cap \overline{B}$

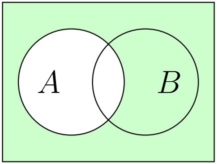


# $\overline{A \cap B}$

$\overline{A \cap B}$

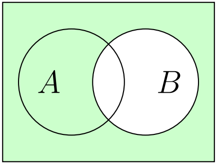



$\overline{A}$



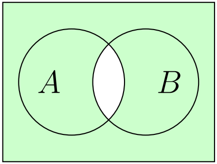

$\cup$

$\overline{B}$




$=$

$\overline{A} \cup \overline{B}$



# 集合の族: Families

- 要素が集合である「集合」
- 例: べき集合 (power sets)
  - 集合 $A$ の部分集合の全て

$$A = \{1, 2, 3\} \tag{5.1}$$

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \tag{5.2}$$

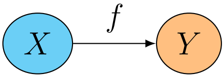
# Pythonによる集合演算

- `X | Y`: $X \cup Y$
- `X & Y`: $X \cap Y$
- `X - Y`: $X \setminus Y$
- `X ^ Y`: $X \oplus Y$

https://github.com/discrete-math-saga/SetAndMapping

# 写像 (Mappings) または関数 (Functions)

- 集合 $X$ の各要素に、集合 $Y$ の要素が一つ対応しているときに、その対応関係を写像または関数と呼ぶ
  - $f : X \to Y$
  - $X$: 定義域 (domain)
  - $Y$: 値域 (range)




- $f$ による $x$ の像 (image)

$$y = f(x) \tag{6.1}$$

- $f$ による $X$ の像

$$\{f(x) \mid x \in X\} \subseteq Y \tag{6.2}$$

# 例 6.1: 簡単な写像

- 二次関数 $f(x) = x^2$

$$f : R \to \{x \mid x \in R, x \geq 0\} \tag{6.3}$$

- 与えられた自然数を越えない最大の素数を返す写像 $p$

$$p : N \to \left\{k \mid k\text{は}n\text{以下の素数}\right\} \tag{6.4}$$

- ASCII 文字に対してコードを 16 進で返す写像 $h$

$$h : \left\{c \mid c\text{は ASCII 文字}\right\} \to \left\{c \mid c\text{は 2 桁の 16 進数}\right\} \tag{6.5}$$

# 単射、全射、全単射

- **単射**: injective, one-to-one
  - $X$ の異なる点には、$Y$ の異なる点が対

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \tag{6.6}$$

- **全射**: surjective, onto
  - $\forall y \in Y$ に対して $f(x) = y$ なる $x$ が存在
  - 注意: $y$ に対して $x$ が一つ定まるのではない
- **全単射**: bijective
  - 逆写像が存在する
  - 全射かつ単射

# 例 6.2:

- $X = Y = R$ とすると、$f(x) = e^x$ は、単射であって、全射でない。
  - 負である $Y$ の要素に対応する $X$ の要素が存在しない
- $X = Y = R$ とすると、$f(x) = \tan x$ は、全射であって、単射でない。
  - $f(x) = f(x + \pi)$
- $X = Y = N$ とすると、$f(x) = x^2$ は、単射であって、全射でない。
  - 完全平方数ではない $Y$ に対して、その平方根は自然数ではない

# 写像の四則演算

- 二つの関数 $f$ と $g$
- それぞれの定義域 $D_f$ と $D_g$

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), (x \in D_f \cap D_g) \tag{6.7}$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), (x \in D_f \cap D_g) \tag{6.8}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), (x \in D_f \cap \{x \mid x \in D_g, g(x) \neq 0\}) \tag{6.9}$$

$$(cf)(x) = cf(x), \left(c\text{は定数}\right) \tag{6.10}$$

# 例 6.3: 写像の四則演算

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x + 1 \\
g(x) &= x^2 - 3 \\
(f \pm g)(x) &= (x+1) \pm \left(x^2 - 3\right) \\
(f \times g)(x) &= (x+1)\left(x^2 - 3\right) \\
(f/g)(x) &= (x+1) / \left(x^2 - 3\right)
\end{aligned}
$$

# 写像の合成: Composites

- 三つの集合 $X$、$Y$、$Z$
- 二つの写像: $f X \to Y$、$g : Y \to Z$
- 合成関数: composites

$$g \circ f : X \to Z \tag{6.11}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \tag{6.12}$$

- 例

$$f(x) = x + 1$$
$$g(x) = x^2 - 3$$
$$(g \circ f)(x) = g(x + 1) = (x + 1)^2 - 3$$

# 直積: Products

- 値に順序がある組
  - 例: 2 次元の座標
  - $f : R \times R \rightarrow R$

$$f(x, y) = x^2 + 2y^3 \tag{6.13}$$

- $n$ 個の値の組: $n$-tuple

$$(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \tag{6.14}$$