# 線形計画法
# Linear Programing

計算機アルゴリズム特論：2015年度

只木進一

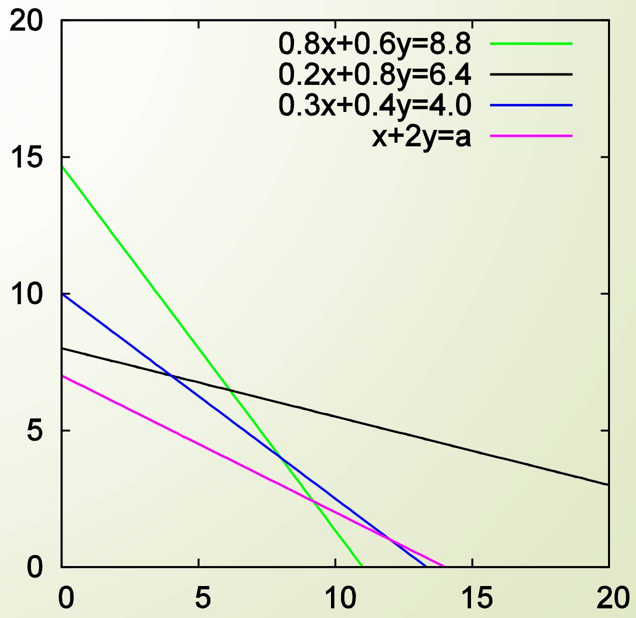
# 線形計画法

- 連立一次不等式で表された領域中において、一次式で表された値を最大または最小とする
- 例
  - 条件
    $$0.8x + 0.6y \leq 8.8$$
    $$0.2x + 0.8y \leq 6.4$$
    $$0.3x + 0.4y \leq 4.0$$
    $$x \geq 0,\ y \geq 0$$
  - $f(x, y) = x + 2y$を最大化する

- 線形計画法そのものはアルゴリズムではない
- 様々な問題が線形計画法として扱える
- 最も基本的方法として、simplex法がある

# Simplex法の考え方

- 条件で表された凸多角形の頂点のいずれかで最大・最小値が得られる

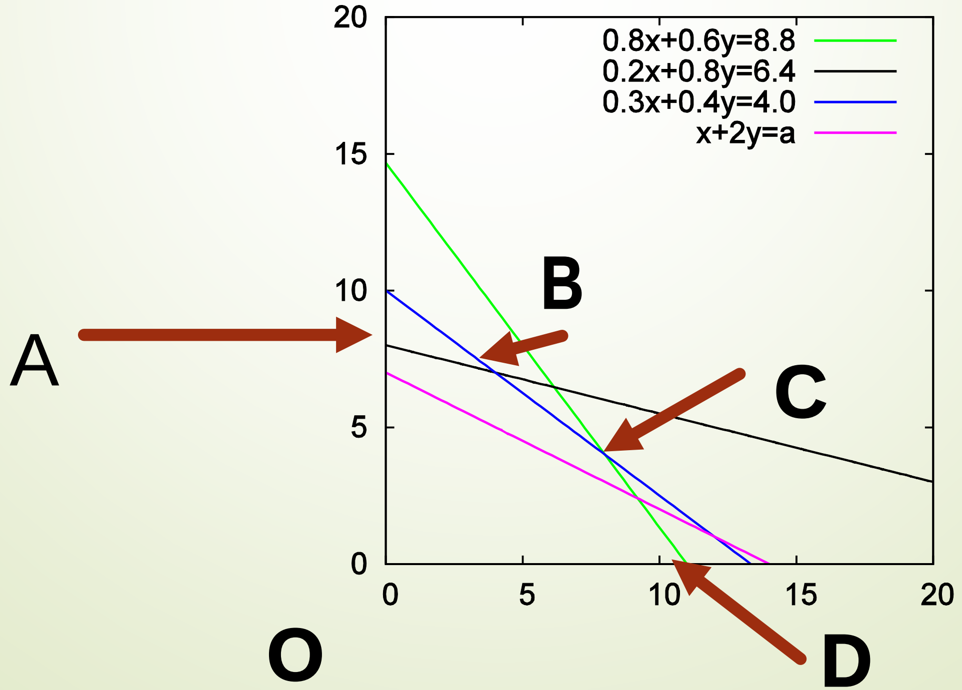


- 連立不等式を連立方程式に変形
  - 新しい変数(slack variables)の導入
  - slack変数は、凸多角形の内側が正になるように導入

$$0.8x + 0.6y + \mu = 8.8$$
$$0.2x + 0.8y + \nu = 6.4$$
$$0.3x + 0.4y + \lambda = 4.0$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \nu \geq 0,\ \lambda \geq 0$$

# Simplex法の考え方

- 頂点は、二つ以上の変数がゼロになる部分に対応




$O \rightarrow (0,0)$

$A \rightarrow (0,8)$

$B \rightarrow (4,7)$

$C \rightarrow (8,4)$

$D \rightarrow (11,0)$

- 既知のこと
  - 直線$x + 2y = a$が多角形の頂点のいずれかの時に最大値

| 頂点 | $x$ | $y$ | $x + 2y$ |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | 0 |
| A | 0 | 8 | 16 |
| B | 4 | 7 | 18 |
| C | 8 | 4 | 16 |
| D | 11 | 0 | 11 |

$$0.8x + 0.6y + \mu = 8.8 \quad ①$$

$$0.2x + 0.8y + \nu = 6.4 \quad ②$$

$$0.3x + 0.4y + \lambda = 4.0 \quad ③$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \nu \geq 0,\ \lambda \geq 0$$

- 5変数に対して3本の式
  - 2変数の値を定めると、残り3変数が確定

- $x'$と$y'$を与えると、空間内の点を特定
  - $(x, y) = (x', y')$に注意

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \mu \\ \nu \\ \lambda \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.8 \\ -0.2 \\ -0.3 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.6 \\ -0.8 \\ -0.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.8 \\ 6.4 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

$$z = x' + 2y'$$

- 別の表記

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0.8 & 0.6 & 1 & 0 & 0 & 8.8 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 1 & 0 & 6.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 1 & 4.0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \mu \\ \nu \\ \lambda \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.8 \\ -0.2 \\ -0.3 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.6 \\ -0.8 \\ -0.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.8 \\ 6.4 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

$$z = x' + 2y'$$

- $x' = y' = 0$(頂点Oに対応)からパラメタを変化させて$z$を増大させる。
- $x' = 0$のまま$y'$を増大させると効果的

$$0.6y + \mu = 8.8$$

$$0.8y + \nu = 6.4$$

$$0.4y + \lambda = 4.0$$

- 変数域の制約から$y' = 8$まで増加させる。
  - 定数項を$y$の係数で除した値の最小値が制約
    - $0.6y + v = 6.4$
  - このとき$(y = 8)$、$v = 0$となる(頂点A)
- 頂点OからAへ移動したことに注意

- パラメタの組を$(x,y)$から$(x,v)$へ
- 二番目の式で$y$の係数を1に
  - $y$の係数0.8で除する

②→②′

$$0.2x+0.8y+v=6.4 \Rightarrow 0.25x+y+1.25v=8$$

$$0.8x+0.6y+\mu=8.8$$

$$-\quad)\quad 0.15x+0.6y+0.75v=4.8$$

$$0.65x-0.75v+\mu=4$$

- 1番目と3番目の式で、$y$の係数を0に

$$① - 0.6 \times ②'$$

$$\begin{array}{rr} & 0.8x + 0.6y + \mu = 8.8 \\ -\quad) & 0.15x + 0.6y + 0.75\nu = 4.8 \\ & 0.65x - 0.75\nu + \mu = 4 \end{array}$$

$$③ - 0.4 \times ②'$$

$$\begin{array}{rr} & 0.3x + 0.4y + \lambda = 4.0 \\ -\quad) & 0.1x + 0.4y + 0.5\nu = 3.2 \\ & 0.2\,\mathrm{x} - 0.5\nu + \lambda = 0.8 \end{array}$$

# 表形式に整理

- パラメタの組を$(x, y)$から$(x, v)$へ

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0.8 & 0.6 & 1 & 0 & 0 & 8.8 \\
0.2 & 0.8 & 0 & 1 & 0 & 6.4 \\
0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 1 & 4.0
\end{array}\right)
$$

$$\Downarrow$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0.65 & 0 & 1 & -0.75 & 0 & 4 \\
0.25 & 1 & 0 & 1.25 & 0 & 8 \\
0.2 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0.8
\end{array}\right)
$$

- $y = -0.25x - 1.25v + 8$を$z = x + 2y$に代入

$$\begin{aligned} z &= x + 2y \\ &= 0.5x - 2.5v + 16 \end{aligned}$$

- 目的関数の変化も一緒に、表形式で表しておく

| | $x$ | $y$ | μ | ν | λ | **定数** | θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| μ | 0.8 | 0.6 | 1 | 0 | 0 | 8.8 | |
| ν | 0.2 | 0.8 | 0 | 1 | 0 | 6.4 | |
| λ | 0.3 | 0.4 | 0 | 0 | 1 | 4.0 | |
| $z$ | -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

$z$行の最小負数の列に縦枠
定数列を縦枠の値で除した値をθ列へ

| | $x$ | $y$ | μ | ν | λ | **定数** | θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| μ | 0.8 | 0.6 | 1 | 0 | 0 | 8.8 | $\frac{8.8}{0.6} = 14.6 \ldots$ |
| ν | 0.2 | 0.8 | 0 | 1 | 0 | 6.4 | $\frac{6.4}{0.8} = 8$ |
| λ | 0.3 | 0.4 | 0 | 0 | 1 | 4.0 | 4.0/0.4=10 |
| $z$ | -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

θ列の正の最小値に対応する行に横枠を

縦枠と横枠の交点（pivot）の値で、横枠の各数値を除する

| | $x$ | $y$ | μ | ν | λ | 定数 | θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| μ | 0.8 | 0.6 | 1 | 0 | 0 | 8.8 | |
| ν | 0.25 | 1 | 0 | 1.25 | 0 | 8 | |
| λ | 0.3 | 0.4 | 0 | 0 | 1 | 4.0 | |
| $z$ | -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

横枠行に適当な数値を乗じて、他の行からpivot以外の縦枠の数値をゼロとする

| | $x$ | $y$ | μ | ν | λ | 定数 | θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| μ | 0.65 | 0 | 1 | -0.75 | 0 | 4 | |
| ν | 0.25 | 1 | 0 | 1.25 | 0 | 8 | |
| λ | 0.2 | 0 | 0 | -0.5 | 1 | 0.8 | |
| $z$ | -0.5 | 0 | 0 | 2.5 | 0 | 16 | |

| | $x$ | $y$ | μ | ν | λ | 定数 | θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| μ | 0.65 | 0 | 1 | -0.75 | 0 | 4 | |
| ν | 0.25 | 1 | 0 | 1.25 | 0 | 8 | |
| λ | 0.2 | 0 | 0 | -0.5 | 1 | 0.8 | |
| $z$ | -0.5 | 0 | 0 | 2.5 | 0 | 16 | |

| | $x$ | $y$ | μ | ν | λ | 定数 | θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| μ | 0.65 | 0 | 1 | -0.75 | 0 | 4 | 6.15… |
| ν | 0.25 | 1 | 0 | 1.25 | 0 | 8 | 32 |
| λ | 0.2 | 0 | 0 | -0.5 | 1 | 0.8 | 4 |
| $z$ | -0.5 | 0 | 0 | 2.5 | 0 | 16 | |

| | $x$ | $y$ | μ | ν | λ | 定数 | θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| μ | 0.65 | 0 | 1 | -0.75 | 0 | 4 | |
| ν | 0.25 | 1 | 0 | 1.25 | 0 | 8 | |
| λ | 1 | 0 | 0 | -2.5 | 5 | 4 | |
| $z$ | -0.5 | 0 | 0 | 2.5 | 0 | 16 | |

| | $x$ | $y$ | μ | ν | λ | 定数 | θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| μ | 0 | 0 | 1 | 0.875 | -3.25 | 1.4 | |
| ν | 0 | 1 | 0 | 1.875 | -1.25 | 1 | |
| λ | 1 | 0 | 0 | -2.5 | 5 | 4 | |
| $z$ | 0 | 0 | 0 | 1.25 | 2.5 | 18 | |

$z$行に負の係数は無い→これ以上増えない
最大値は18

# $n$個の変数と$m$個の条件式に一般化

- 変数　$x_i (0 \leq i < n)$
- 条件式

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} x_j \leq b_i \ (0 \leq i < m)$$

- 目的関数

$$z = \sum_{i=0}^{n-1} c_j x_j$$

- Slack variables $\xi_k \ (0 \leq k < m - n)$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} x_j + \xi_i = b_i \ (0 \le i < m)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} -c_i x_i = 0$$

- 行列形式

$$\sum_{j=0}^{n+m} A_{ij} y_j = B_i \ (0 \le i < m+1)$$

$$B_i = \begin{cases} b_i & 0 \le i < m \\ 0 & i = m \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} x_i & 0 \le i < n \\ \xi_i & n \le i < n + m \end{cases}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & 0 \le i < m, 0 \le j < n \\ -c_i & i = m, 0 \le j < n \\ 1 & 0 \le i < m, j = i + n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
f = false;
while(!f){
    k=評価式中の係数の最小値; q = A_mk;
    if(q ≥ 0) f = true;
    else{
        l =pivotの行; p = A_lk;
        for(0 ≤ j < n + m) A_lj = A_lj / p;
        B_l = B_l / p;
        for(0 ≤ i < m + 1){
            if(i ≠ l){
                r = A_ik / A_lk;
                for(0 ≤ j < n + m) A_ij = A_ij − r × A_lj;
                B_i = B_i − r × B_l;
            }
        }
    }
}
```